

A. HOLLINGER

ALGEBRĂ

VII

A. HOLLINGER
PROFESOR EMERIT AL R.P.R.

ALGEBRA

MANUAL PENTRU CLASA a VII-a

EDITURA DE STAT DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI— 1962

Capitolul I

EXPRESII ALGEBRICE

1. Reprezentarea numerelor prin litere. În aritmetică, pentru a exprima unele proprietăți ale operațiilor cu numere, sau unele reguli, am reprezentat numerele prin litere. Vom arăta aceasta prin câteva exemple.

a) Se știe că:

$$3 + 5 = 5 + 3; \quad 4 + 7 = 7 + 4 \quad \text{ș.a.m.d.}$$

Adunarea este comutativă. Acest lucru este adevărat nu numai în cazul acestor numere, 3 și 5 sau 4 și 7, ci oricare ar fi termenii adunării. Pentru a exprima aceasta, se scrie:

$$a + b = b + a.$$

Aici literele a și b reprezintă numere oarecare (naturale sau fracționare).

b) Se știe că, pentru a înmulți două fracții, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei.

De exemplu:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}.$$

Dacă notăm prima fracție cu $\frac{a}{b}$, iar a doua cu $\frac{c}{d}$, regula înmulțirii fracțiilor se scrie:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Aici, literele a, b, c, d reprezintă numere naturale oarecare (b și d fiind diferite de zero).

c) Se știe că, pentru a afla aria unui dreptunghi, trebuie să înmulțim baza dreptunghiului cu înălțimea sa. Această regulă se exprimă, scurt, astfel:

$$A = b \cdot i,$$

unde A , b și i sînt numere. De exemplu, pentru $b = 5(\text{m})$, $i = 3(\text{m})$, formula dă: $A = 5 \cdot 3 = 15 (\text{m}^2)$.

Reprezentarea numerelor prin litere este folosită, pentru că permite exprimarea sub o formă foarte scurtă.

2. Semnele operațiilor. Cînd numerele se reprezintă prin litere, operațiile se exprimă prin semnele cunoscute din aritmetică $+$, $-$, \cdot , $:$, linia de fracție ș.a.m.d.. Astfel $a - b$ arată că se scade numărul b din numărul a , \sqrt{a} arată că se scoate rădăcina pătrată din numărul a ș.a.m.d. Numai în cazul înmulțirii este o deosebire: de cele mai multe ori nu se pune punct între factori. Astfel, $3a$ înseamnă: 3 înmulțit cu a ; xy înseamnă x înmulțit cu y . Nu se poate renunța la punctul de înmulțire cînd ambii factori sînt reprezentați prin cifre, căci 35 înseamnă: treizeci și cinci, nu 3 înmulțit cu 5*. Cînd un produs conține un factor numeric, acel factor se scrie înaintea celorlalți. De exemplu, se scrie $3x$, nu $x3$.

* La numere mixte, fracția se scrie lângă numărul întreg; de exemplu: $3\frac{1}{2}$. Aici alăturarea celor două numere reprezintă o adunare; $3\frac{1}{2}$ reprezintă suma $3 + \frac{1}{2}$.

3. Probleme cu date în litere. *Deasupra unui butoi gol, care are o capacitate de 240 l, sînt două robinete. Unul dintre robinete dă 7 l apă pe minut, iar celălalt dă 5 l apă pe minut. În cît timp se va umple butoiul dacă deschidem amîndouă robinetele?*

Rezolvare. 1) Cîtă apă dau cele două robinete într-un minut?

$$(7 + 5) \text{ l.}$$

2) În cîte minute se strîng în butoi 240 l de apă?

$$\text{În } t = \frac{240}{7 + 5} \text{ minute.}$$

Aceasta este o *formulă numerică*. Ea ne arată ce operații trebuie să facem cu numerele date în problemă, pentru a o rezolva.

Acum este foarte ușor să obținem răspunsul:

$$7 + 5 = 12; \quad 240 : 12 = 20.$$

Butoiul se umple în 20 de minute.

În rezolvarea acestei probleme, ca și a oricărei alte probleme, deosebim două părți: *a)* judecata, care duce la formula numerică și *b)* efectuarea operațiilor. Dintre aceste părți, prima este cea principală. Dacă se schimbă numai datele, putem spune că problema nu s-a schimbat. În tabelul de mai jos se văd diferite exemple:

Capacitatea butoiului:	200	160	250
Debitul robinetului I:	8	7	12
Debitul robinetului II:	4	3	4
Rezultatul:	$\frac{200}{8+4}$	$\frac{160}{7+3}$	$\frac{250}{12+4}$

În locul formulelor (expresiilor) din ultimul rând, care diferă de la un exemplu la altul, putem scrie:

$$t = \frac{\text{capacitatea butoiului}}{\text{debitul primului robinet} + \text{debitul robinetului al doilea}}$$

Expresia devine mai scurtă dacă reținem numai inițialele. Notăm cu C numărul care reprezintă capacitatea butoiului, cu D debitul primului robinet, și cu d debitul robinetului al doilea. Obținem:

$$t = \frac{C}{D + d}.$$

Aceasta este o *expresie algebrică*. Ea exprimă (arată) ce operații trebuie să facem cu numerele C , D și d , pentru a rezolva problema următoare:

Deasupra unui butoi gol, care are o capacitate de C litri, sînt două robinete. Unul dintre robinete dă D litri de apă pe minut, iar celălalt dă d litri pe minut. În cît timp se va umple butoiul, dacă deschidem amîndouă robinetele?

Această problemă conține toate problemele din tabelul de mai sus, iar expresia (formula)

$$t = \frac{C}{D + d}$$

ne dă soluțiile tuturor acestor probleme. N-avem decît să înlocuim literele prin numere corespunzătoare și să efectuăm operațiile:

În prima problemă, avem:

$$C = 240; D = 7; d = 5; \text{ deci: } t = \frac{240}{7 + 5} = 20.$$

Pentru $C = 200$; $D = 8$; $d = 4$, avem:

$$t = \frac{200}{8 + 4} = \frac{200}{12} = 16 \frac{2}{3} \text{ ș.a.m.d.}$$

Cînd datele unei probleme sînt exprimate prin litere, se spune că problema este pusă sub forma *generală*. O astfel de problemă cuprinde un număr mare de probleme, care se obțin înlocuind literele prin diferite numere. Aceste probleme sînt probleme *particulare*.

4. Expresii algebrice. Rezolvînd diferite probleme, în care unele dintre date sau toate datele sînt exprimate prin litere, se obțin diferite expresii, ca de exemplu:

$$a + b - c; 5a - 2; \frac{5a + 3b + c}{4} \text{ ș.a.m.d.}$$

Acestea sînt *expresii algebrice*. Fiecare din ele indică una sau mai multe operații cu numerele pe care le conține, numerele fiind reprezentate prin cifre sau prin litere.

Probleme cu conținut cu totul diferit pot duce la aceeași expresie algebrică. În algebră se lucrează cu expresii algebrice și, de cele mai multe ori, nu se arată de la ce problemă provin.

Literele care intră într-o expresie algebrică pot lua diferite valori; ele reprezintă niște *variabile*. În cazul contrar, ele reprezintă niște *constante*. De exemplu, în expresia $5a$, 5 este o constantă, iar a este o variabilă.

Cînd, într-o expresie algebrică, înlocuim literele prin numere și facem calculele indicate, obținem *valoarea numerică* a acelei expresii.

Mai sus am aflat valoarea numerică a expresiei

$t = \frac{C}{D+d}$ pentru $C=240$, $D=7$, $d=5$ și pentru $C=200$, $D=8$, $d=4$.

EXERCITII

Exprimarea prin litere a unor relații cunoscute din aritmetică

1. Să se scrie, notînd numerele naturale prin litere, că: *a)* adunarea numerelor naturale este comutativă; *b)* înmulțirea numerelor naturale este comutativă; *c)* adunarea fracțiilor este comutativă (fracțiile se vor nota cu $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$); *d)* înmulțirea fracțiilor este comutativă.

2. Să se scrie cu semne matematice că: *a)* dacă înmulțim ambii termeni ai unei fracții cu 2, obținem o fracție egală cu cea dată (fracția dată se va nota cu $\frac{a}{b}$); *b)* dacă înmulțim ambii termeni ai unei fracții cu 3, obținem o fracție egală cu cea dată; *c)* la fel, dacă-i înmulțim cu un număr oarecare (numărul oarecare se va nota cu n).

3. Să se scrie cu semne matematice că:

a) pentru a aduna două fracții care au același numitor, se adună numărătorii și se lasă numitorul neschimbat (cele două fracții se vor nota cu $\frac{a}{n}$ și $\frac{b}{n}$; de ce s-a pus la ambele fracții ca numitor aceeași literă?); *b)* pentru a scădea dintr-o fracție o altă fracție care are același numitor, se scade al doilea numărător din primul și se lasă

numitorul neschimbat; *c)* pentru a înmulți o fracție cu un număr întreg, înmulțim numărătorul ei cu întregul; *d)* pentru a împărți o fracție printr-un număr întreg, înmulțim numitorul ei cu întregul; *e)* pentru a înmulți două fracții, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei; *f)* pentru a împărți o fracție printr-o altă fracție, înmulțim prima fracție cu inversa fracției a doua; *g)* dacă la numărătorul unei fracții oarecare adunăm 1, obținem o fracție mai mare decât fracția de la început; *h)* dacă adunăm la numitorul unei fracții oarecare numărul 1, obținem o fracție mai mică decât fracția de la început; *i)* ce se întâmplă, dacă scădem din numărătorul sau din numitorul unei fracții numărul 1?

4. Să se afle x din proporțiile următoare:

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{6}; \quad \frac{x}{a} = \frac{2}{3}; \quad \frac{x}{b} = \frac{a}{4}; \quad \frac{x}{a} = \frac{b}{c}.$$

5. Se dau proporțiile:

$$\frac{a}{2} = \frac{5}{b}; \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{y}; \quad \frac{a}{3} = \frac{4}{7}.$$

Să se scrie pentru fiecare din ele că produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.

Probleme cu date în litere

6. Am a lei și mai primesc 5 lei. Cît am acum? Dar dacă în loc de 5 lei, primesc b lei? Cît îmi rămîne dacă în loc să capăt 5 lei cheltuiesc 3 lei? Dar dacă cheltuiesc b lei?

7. Într-o școală, în clasa a VII-a A sînt x elevi, în clasa a VII-a B sînt y elevi, iar în clasa a VII-a C sînt z elevi. Cîți elevi sînt în cele trei clase?

8. a) Gheorghe are x lei, iar Mihai are cu 12 lei mai puțin. Câți lei are Mihai?

b) Un muncitor a făcut luni x piese, marți y piese, iar miercuri z piese. Câte piese a făcut în aceste trei zile?

c) O mașină parcurge în prima oră x km, în ora a doua y km, iar în ora a treia z km. Câți kilometri a parcurs în aceste trei ore?

9. Ionel are a ani, iar sora lui mai mare, Viorica, are b ani. Cu cât este mai mare Viorica decât Ionel? Cu cât este mai mic Ionel decât Viorica?

10. a) Am a lei, mai primesc b lei și cheltuiesc c lei. Cât îmi rămîne?

b) Am a lei, cheltuiesc b lei, apoi mai cheltuiesc 3 lei. Cât îmi rămîne?

11. a) La o întreprindere s-au prevăzut pentru anul 1961 la cheltuieli a lei și s-au cheltuit numai b lei. Ce economii s-au făcut? b) S-au prevăzut a lei cheltuieli, în prima jumătate a anului se economisesc b lei, iar în jumătatea a doua, c lei. Cât s-a cheltuit?

12. Ion are a lei, Nicolae are cu b lei mai mult ca Ion, iar Viorica are cu 3 lei mai puțin ca Nicolae. Cât are Viorica?

13. Dintr-un ogor al unei gospodării agricole colective care are a ha, o combină seceră în prima zi b ha, iar în ziua a doua c ha. Câte hectare mai rămîn de secerat?

14. După plan, o lucrare urma să coste a lei. Prin grija muncitorilor și tehnicienilor s-au economisit materiale în valoare de x lei, iar la manoperă s-a făcut o economie de y lei. Cât a costat lucrarea?

15. Un copil are acum 12 ani. Ce vîrstă a avut cu n ani în urmă? Ce vîrstă va avea acest copil peste n ani?

16. Să se compună cîte o problemă care să ducă la formulele:

$a) x + y;$ $b) x - y;$ $c) x + y + 3;$
 $d) x - y + 10;$ $e) x - a + b;$ $f) x - a - b.$

17. O echipă este formată din 15 muncitori. La o lucrare, 3 din ei economisesc cîte a lei, 5 economisesc cîte b lei, iar 7, cîte c lei. Să se afle totalul economiilor realizate de această echipă.

18. Într-o școală sînt a clase, în fiecare clasă sînt b bănci, iar în fiecare bancă stau c elevi. Câți elevi are această școală?

19. Într-o livadă sînt a rînduri de cîte b meri, fiecare măr dă în medie x kg mere, iar kilogramul de mere se vinde cu y lei. Cu cît s-a vîndut toată cantitatea de mere?

20. Să se compună o problemă care să ducă:
 $a)$ la expresia abc ; $b)$ la expresia $abcd$.

21. Cît costă $\frac{3}{4}$ kg carne, dacă un kilogram de carne costă: $a)$ 12 lei; $b)$ 15 lei; $c)$ x lei.

22. Cît fac: $a)$ 3% din 458?; $b)$ 5% din n ?; $c)$ $p\%$ din 530?; $d)$ $p\%$ din S ?

23. La o cooperativă s-au adus într-o zi 8 lăzi de cîte b kg mere. Pînă seara s-au vîndut 15 kg de mere. Cîte kilograme de mere au rămas?

Aceeași întrebare, dacă: $a)$ s-au adus a lăzi de cîte 10 kg și s-au vîndut 24 kg; $b)$ s-au adus 12 lăzi de cîte b kg și s-au vîndut c kg; $c)$ s-au adus a lăzi de cîte b kg și s-au vîndut c kg.

Să se compună o problemă a cărei rezolvare să ducă la formula: $ab - c$.

24. O echipă de zidari urma să facă a m³ de zidărie pe zi. Ea depășește norma în fiecare zi cu câte 6 m³. Câți metri cubi de zidărie face echipa în 5 zile? Aceeași întrebare dacă: a) norma este de 24 m³ de zidărie pe zi și echipa depășește zilnic norma cu x m³; b) norma este de a m³ zidărie pe zi și echipa depășește zilnic norma cu x m³.

25. O sumă de x lei se împarte la 3 persoane. Cât revine fiecăreia? Aceeași întrebare, dacă x lei se împart la: a) 5 persoane; b) n persoane.

26. Într-un trimestru, un elev a fost ascultat de trei ori la oral și a căpătat notele a, b, c . Ce medie îi iese la oral? Aceeași întrebare, dacă elevul a fost ascultat de 4 ori și a căpătat notele a, b, c, d .

27. Un muncitor primește un premiu de a lei. Din acești bani el depune la C.E.C. 100 de lei, iar restul îi împarte în părți egale la cei 3 copii ai săi. Cât revine fiecărui copil? Aceeași întrebare, dacă: a) premiul este de 350 de lei, depune la C.E.C. b lei și sînt 4 copii; b) premiul este de a lei, depune la C.E.C. b lei și sînt n copii.

Să se compună o problemă care să ducă la formula $\frac{a-b}{n}$.

28. Un muncitor trebuia să facă a piese. El lucrează 3 zile făcînd câte x piese pe zi. În câte zile va face restul pieselor, dacă în zilele următoare face câte 6 piese pe zi? Aceeași întrebare, dacă: a) el trebuia să facă 100 de piese și a lucrat b zile, făcînd câte x piese pe zi, iar în zilele următoare face câte 5 piese pe zi; b) el trebuia să facă a piese și a lucrat b zile făcînd câte x piese pe zi, iar în zilele următoare face câte n piese pe zi.

29. O echipă formată din elevi și eleve a cules 5 kg de căpșuni. Cîte kilograme de căpșuni a cules

În medie fiecare, dacă echipa este formată din:
a) 8 băieți și *b* fete; *b)* *a* băieți și 6 fete; *c)* *a* băieți și *b* fete?

30. O gospodărie agricolă colectivă cultivă grâu pe trei tarlale: una de *a* ha, a doua, de *b* ha, și a treia, de *c* ha. Toată recolta este de *n* kg grâu. Care este producția medie la hectar?

31. O cisternă are două robinete. Printr-un robinet intră *a* litri de benzină pe minut, iar printr-un alt robinet se scurg *b* litri benzină pe minut ($a > b$; debitele se presupun constante). Se întreabă:
a) cu cât crește într-un minut cantitatea de benzină din cisternă; *b)* în cât timp se strâng în cisternă 500 litri de benzină?

Capitolul II

NUMERE POZITIVE ȘI NEGATIVE

5. Introducerea numerelor negative. Cu ajutorul numerelor se poate răspunde precis la întrebarea: cît? de exemplu: cîți elevi sînt în clasă? 42 de elevi. Cît de mare este această cameră? Ea are 30 m^2 .

Pentru cele mai multe mărimi, răspunsul la întrebarea cît? este complet, dacă este format dintr-un număr urmat de indicația unității de măsură. Sînt însă cazuri cînd aceasta nu este suficient.

Vom lua ca prim exemplu *temperatura*. Ea se măsoară prin înălțimea coloanei de mercur a termometrului, socotită de la punctul zero, unitatea de măsură fiind gradul. O afirmație ca: termometrul arată 5° nu are înțeles deplin. Trebuie să se adauge dacă sînt 5° *deasupra* punctului zero, sau *dedesubt*. În primul caz se spune că sînt $+5^\circ$ (plus 5 grade), iar în cazul al doilea se spune că sînt -5° (minus 5 grade). Sînt posibile temperaturi de -10° ; $-5\frac{1}{2}$; $-15,8^\circ$ ș.a.m.d.

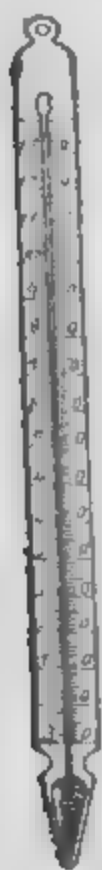


Fig. 1. Termometru gradat

Numerele pe care le cunoaştem din aritmetică, cum ar fi: $1; 2; 5; 10; 100; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; 7,8$ ş.a.m.d., adică numerele întregi (naturale) şi fracţionare, ne dau posibilitatea să exprimăm diferite temperaturi, când mercurul din termometru se ridică deasupra punctului zero. Pentru cazurile când mercurul coboară sub zero, se folosesc numere noi, cum ar fi:

$-1; -2; -5; -10; -100; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{5}; -7,8$ ş.a.m.d.

Aceste numere se numesc numere *negative*. Ele se scriu cu ajutorul cifrelor, ca şi numerele cunoscute din aritmetică, dar cu semnul $-$ (minus) în faţă. Pentru a deosebi mai bine numerele cunoscute din aritmetică de aceste numere noi, se pune uneori în faţa lor semnul $+$ (plus). În loc de 1 se scrie $+1$, în loc de 2 se scrie $+2$, în loc de $\frac{3}{5}$ se scrie $+\frac{3}{5}$ ş.a.m.d. Aceste numere se numesc numere *pozitive*. Numărul zero nu este nici pozitiv, nici negativ.

6. Numere raţionale. Numerele naturale ($1, 2, 3$ ş.a.m.d.) şi fracţiile (de exemplu: $\frac{3}{8}, \frac{2}{3}, 0,75$ ş.a.m.d.) sînt numere pozitive. Fiecărui număr pozitiv îi corespunde un număr negativ (numărului 1 îi corespunde numărul -1 , lui 2 îi corespunde -2 , lui $\frac{3}{4}$ îi corespunde $-\frac{3}{4}$ ş.a.m.d.).

Numerele întregi şi fracţionare, pozitive şi negative şi numărul zero se numesc numere *raţionale*.

Cîte două numere ca $+1$ și -1 , $+2$ și -2 , $+\frac{3}{5}$ și $-\frac{3}{5}$ se numesc *opuse*. Fiecare din ele este opusul celuilalt. De exemplu, -1 este opusul lui $+1$, și $+1$ este opusul lui -1 .

7. **Observări.** 1) Cînd un număr este reprezentat printr-o literă și în fața literei nu se găsește nici un semn, *se* înseamnă că acel număr este neapărat pozitiv. De exemplu, litera a poate reprezenta numărul $+7$.

2) În urma introducerii numerelor negative, expresia *număr întreg* capătă un sens mai larg decît în aritmetică. În aritmetică se înțelege prin numere întregi numai numerele naturale ($1, 2, 3, \dots$). Acum cunoaștem și numere întregi negative $-1, -2, -3$ ș.a.m.d. Numerele naturale sînt numere întregi și *pozitive*.

8. **Mărimi care se socotesc în două sensuri.** Temperatura se exprimă uneori printr-un număr pozitiv, alteori printr-un număr negativ, pentru că ea se socotește în *două sensuri* (în sus și în jos), de la un punct anumit (punctul zero) numit *origine*.

Există și alte mărimi care se socotesc în două sensuri.

1) **Variația mărimilor.** Mărimile pot varia în două sensuri, pornind de la o situație dată (*origine*). *Creșterea* se exprimă printr-un număr *pozitiv*, iar *descreșterea* printr-un număr *negativ*.

2) **Sumele de bani pe care urmează să le primească cineva** se exprimă prin numere *pozitive*; sumele de bani pe care urmează să le plătească cineva se exprimă prin numere *negative*. De exemplu: $+3\,000$ de lei înseamnă că avem de primit $3\,000$ de lei, iar $-3\,000$ de lei înseamnă că avem de plătit $3\,000$ de lei. Numerele care în registrele de contabilitate se trec în coloana *credit*, pot fi considerate ca *pozitive*, iar cele care se trec în coloana *debit*, ca *negative*.

3) **Timpul.** Timpul se socotește de la un moment anumit, luat ca origine, iar ca sens pozitiv se ia sensul de la trecut

que viitor. Unui moment de după originea timpului îi corespunde un număr pozitiv, iar unui moment dinainte de originea timpului îi corespunde un număr negativ. În istorie, se ia ca origine a timpului începutul erei noastre. Sinteza în anul $+1962$, adică în anul 1962 e.n., fundarea Romei s-a produs în anul -753 , adică în anul 753 î.e.n.

4) *Longitudinea și latitudinea*. Pentru longitudini se ia ca origine primul meridian, iar ca sens pozitiv sensul de la vest spre est. Longitudinea *estică* se exprimă printr-un număr *pozitiv*, iar cea *vestică* printr-un număr *negativ*. Pentru latitudini se ia ca origine ecuatorul și ca sens pozitiv sensul de la sud spre nord. Latitudinea *nordică* se exprimă printr-un număr *pozitiv*, iar cea *sudică* printr-un număr *negativ*.

5) *Altitudini*. Se ia ca origine nivelul mării, iar ca sens pozitiv sensul de jos în sus.

6) Când asupra unui punct O acționează două forțe care au aceeași direcție, dar sensuri contrare, ca în figura 2, vom exprima una din ele, de exemplu forța care trage spre dreapta, printr-un număr pozitiv, iar cealaltă, printr-un număr negativ.



Fig. 2

7) Există două feluri de electricitate: pozitivă (sticloasă) și negativă (rășinoasă).

Foarte multe mărimi se pot exprima numai prin numere pozitive, nu și prin numere negative. Așa sînt, de exemplu, prețurile mărfurilor. Afirmatia: „Această carte costă -4 lei” nu are nici un sens. La fel sînt: anile, volumele etc.

9. **Numerele negative ca rezultat al scăderii.** La aritmetică se învață că un număr mai mare nu poate fi scăzut dintr-un număr mai mic. Totuși sînt cazuri cînd trebuie să facem astfel de scăderi.

E x e m p l e. a) Termometrul arată la prînz 15° și pînă seara temperatura scade cu 5° . Cîte grade arată termometrul seara? Răspuns: $15 - 5 = 10$. Seara, termometrul arată 10° .

b) La prînz, termometrul arată 2° și pînă seara temperatura scade cu 5° . Cîte grade arată termometrul seara? Și acum să facem o scădere, și anume:

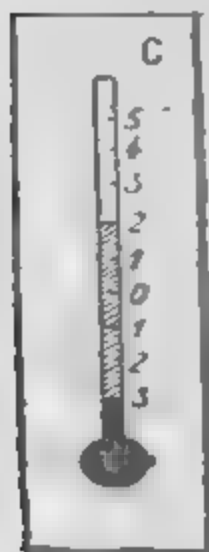


Fig. 3

$$2 - 5 = ?$$

Dacă mercurul coboară cu 5° , el ajunge la -3° (fig. 3). Deci:

$$2 - 5 = -3.$$

De data aceasta, a trebuit să scădem un număr mai mare dintr-un număr mai mic. Operația a devenit posibilă datorită introducerii numerelor negative.

10. Axa numerelor. Pe o dreaptă (fig. 4) luăm un punct oarecare O ca origine și un sens pozitiv, de exemplu sensul de la stînga la dreapta. Apoi luăm un segment oarecare ca unitate și purtăm pe dreapta noastră, la dreapta lui O , segmentele OA , AB , BC ș.a.m.d., egale cu unitatea. Numărului 1 îi corespunde astfel punctul A , numărului 2 — punctul B , numărului 3 — punctul C ș.a.m.d. Continuînd astfel, facem ca fiecărui număr întreg și pozitiv (natural) să-i corespundă un punct de pe dreapta noastră. Frațiilor pozitive le corespund puncte situate între aceste puncte. Fie, de exemplu, numărul $2\frac{3}{7}$. Purtăm pe



Fig. 4

dreaptă două segmente egale cu unitatea și în continuare, $\frac{3}{7}$ din unitate. Punctul M astfel obținut

corespunde numărului $2\frac{3}{7}$. Punctul N corespunde numărului 4,6.

Procedînd în același fel la stînga punctului O , obținem punctele care corespund numerelor negative. Numărului -1 îi corespunde punctul A' , numărului -2 îi corespunde punctul B' ș.a.m.d. Numărului zero îi corespunde punctul O .

În felul acesta, facem ca fiecărui număr rațional să-i corespundă un punct pe dreaptă. Această dreaptă se numește *axa numerelor*. Cuvîntul *axă* exprimă faptul că pe această dreaptă s-a ales un sens pozitiv. Numerele care corespund punctelor se numesc *abscisele* punctelor. De exemplu, punctul A are abscisa 1, punctul C' are abscisa -3 . Uneori punctele se numesc după abscisele lor. Se spune: punctul 3, punctul 0, punctul -5 ș.a.m.d.

11. Valoarea absolută a unui număr. Cînd este vorba de o mărime care se măsoară în două sensuri, uneori nu se ține seamă de sensul ei.

Ex e m p l u. În cazul celor două forțe din figura 2, dacă vrem să știm care din ele este mai mare, nu comparăm numerele -3 și $+8$, ci $+3$ și $+8$. Forța îndreptată spre dreapta este mai mare. Pentru compararea mărimilor celor două forțe s-a înlocuit numărul -3 cu $+3$. Spunem că am luat *valoarea absolută* a numărului -3 .

Valoarea absolută a unui număr pozitiv este chiar acel număr; valoarea absolută a unui număr negativ este opusul lui; valoarea absolută a lui zero este zero.

Ex e m p l e. Valoarea absolută a numărului 3 (sau $+3$) este 3. Valoarea absolută a numărului -3 este tot 3.

Văloarea absolută a unui număr se notează închizînd numărul între două bare. De exemplu, valoarea absolută a numărului a se scrie: $|a|$. Deci, $|+3| = 3$ sau $+3$; $|-3| = 3$ sau $+3$.

În loc de valoare absolută, se spune și *modul*. De exemplu, modulul lui -5 este 5, modulul lui $+6$ este 6.

12. Ordonarea numerelor raționale. Pentru a ști care dintre două numere raționale este mai mare, ținem seama de poziția lor pe axa numerelor:

Dintre două numere raționale, numărul situat la dreapta este mai mare, iar cel situat la stînga este mai mic.

Prin dreapta și stînga se înțeleg dreapta și stînga cititorului.

De aici rezultă că:

1) *Din două numere pozitive, numărul care are valoarea absolută mai mare este mai mare.*

Exemple: $7 > 5$; $3,5 > 3$ (fig. 4).

Această definiție este potrivită. În adevăr, cînd termometrul arată $+7^\circ$, e mai cald decît atunci cînd arată $+5^\circ$.

2) *Din două numere negative, numărul care are valoarea absolută mai mare este mai mic.*

Exemple: $-2 < -1$; $-5 > -6$ (fig. 4).

Și această definiție este potrivită. În adevăr, cînd termometrul arată -6° este mai puțin cald decît atunci cînd arată -5° .

3) *Orice număr pozitiv este mai mare decît orice număr negativ.*

Exemple: $1 > -20$; $-3 < 8$.

De exemplu, cînd termometrul arată $+1^\circ$ (sau orice alt număr de grade deasupra lui zero) este mai cald decît atunci cînd arată -20° (sau orice alt număr de grade sub zero).

4) Numărul zero este mai mare decât orice număr negativ și mai mic decât orice număr pozitiv.

Exemple. — $2 < 0$; $3 > 0$.

De exemplu, când termometrul arată 0° , este mai cald decât atunci când arată un număr oarecare de grade sub zero și mai puțin cald decât atunci când arată un număr oarecare de grade deasupra lui zero.

Pentru a arăta că un număr x este pozitiv, se scrie: $x > 0$; pentru a arăta că x este negativ, se scrie: $x < 0$.

13. Operații cu numere raționale. La aritmetică am învățat cum se fac operațiile cu numere pozitive. Cu numere raționale oarecare, pozitive sau negative, se pot face aceleași operații.

Semnele operațiilor sînt cele obișnuite. Fiecare dintre semnele $+$ și $-$ capătă astfel două înțelesuri. Astfel $+3$, de exemplu, înseamnă: 1) a aduna numărul 3 cu un alt număr; 2) numărul pozitiv $+3$. Tot așa -3 înseamnă: 1) a scădea numărul 3 din alt număr; 2) numărul negativ -3 .

Pentru a nu scrie două semne unul după altul, semnul numărului împreună cu cifra sau cifrele respective se închid între paranteze. Deci, suma numerelor $+8$ și -2 se scrie: $(+8) + (-2)$; diferența aceluiași numere se scrie: $(+8) - (-2)$. În mod analog se procedează la înmulțire și la împărțire.

14. Adunarea. Un om merge pe o șosea pornind dintr-un punct O . El face întâi a pași și ajunge într-un punct M ; de aci mai face b pași și ajunge astfel într-un punct N . Câți pași a făcut omul pentru a ajunge din punctul O în punctul N ?

Trebuie să examinăm cazurile: când ambele numere (a și b) sînt pozitive, când ambele numere sînt negative și când unul din cele două numere

este negativ, iar celălalt este pozitiv. Alegem pe șosea ca sens pozitiv sensul de la stînga la dreapta. Dacă omul face un număr oarecare de pași la *dreapta*, numărul corespunzător va fi *pozitiv*, iar dacă omul merge spre *stînga*, numărul va fi *negativ*.

De exemplu:

+ 5 pași înseamnă 5 pași la dreapta;

— 5 pași înseamnă 5 pași la stînga.

Cînd a și b sînt numere pozitive, răspunsul este foarte ușor (v. fig. 5); omul trebuie să facă

$a + b$ (pași).

Tabelul de la pagina 23 reprezintă diferite cazuri posibile. În coloanele 3 și 4 sînt trecute diferite valori pentru a și b , în coloana 5, se dă rezultatul

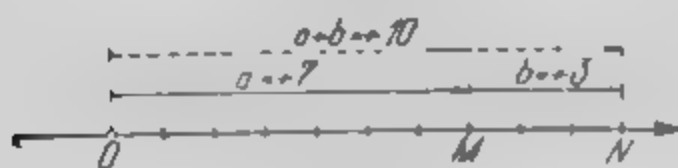


Fig. 5

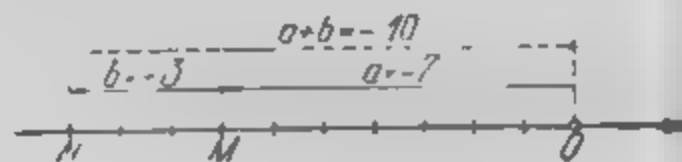


Fig. 6

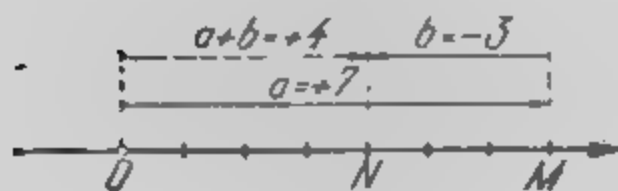


Fig. 7

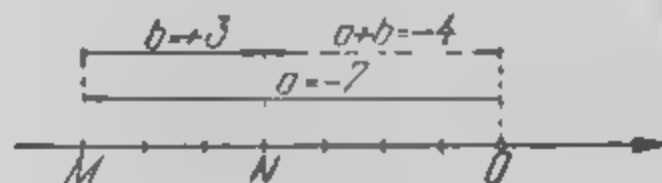


Fig. 8

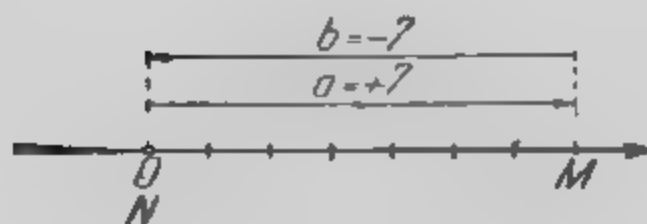


Fig. 9

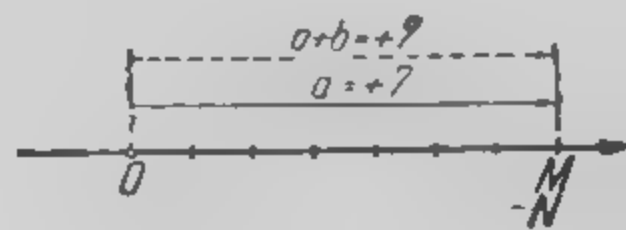


Fig. 10

1	2	3	4	5	6	7
Fig.		Pași de la O la $M; a = M$ la $N; b =$		Pași de la O la N	$a + b = c$	Cum am calculat suma
1	5	+7	+3	10 pași la dreapta, adică: +10	$(+7) + (+3) = +10$	Am adunat valorile absolute, și în fața rezultatului am pus semnul +
2	6	-7	-3	10 pași la stînga, adică: -10	$(-7) + (-3) = -10$	Am adunat valorile absolute și am pus în fața rezultatului semnul -
3	7	+7	-3	4 pași la dreapta, adică: +4	$(+7) + (-3) = +4$	Am scăzut valoarea absolută mai mică din valoarea absolută mai mare, iar în fața rezultatului am pus semnul + (semnul numărului care are valoarea absolută mai mare).
4	8	-7	+3	4 pași la stînga, adică: -4	$(-7) + (+3) = -4$	Am scăzut valoarea absolută mai mică din valoarea absolută mai mare, iar în fața rezultatului am pus semnul - (semnul numărului care are valoarea absolută mai mare).
5	9	+7	-7	nici un pas	$(+7) + (-7) = 0$	Suma este egală cu zero.
6	10	+7	0	7 pași la dreapta, adică: +7	$(+7) + 0 = +7$	Suma este egală cu primul termen.

dedus din figură, iar în coloana 6 se arată cum se face operația cu numerele respective.

Cazurile 1 și 2 se înțeleg ușor. În cazurile 3 și 4 am pus în fața rezultatului semnul numărului care are valoarea absolută mai mare, din motivul următor: dacă se fac mai mulți pași spre dreapta, rezultatul este o deplasare spre dreapta, iar dacă se fac mai mulți pași spre stînga, rezultatul este o deplasare spre stînga.

Regulă. 1) *Pentru a aduna două numere care au același semn, adunăm valorile lor absolute și punem în fața rezultatului semnul pe care-l au cele două numere.*

2) *Pentru a aduna două numere care au semne diferite, scădem valoarea absolută mai mică din valoarea absolută mai mare, iar în fața rezultatului punem semnul numărului care are valoarea absolută mai mare.*

3) *Suma a două numere opuse este zero.*

4) *Cînd un termen al adunării este zero, suma este egală cu celălalt termen.*

E x e m p l e. $(-12) + (+8) = -4;$

$(+2,75) + (-3,20) = -0,45;$

$$\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) = \left(-\frac{9}{24}\right) + \left(-\frac{20}{24}\right) = -\frac{29}{24} = -1\frac{5}{24}.$$

15. Sumă algebrică. O sumă de doi sau mai mulți termeni, indiferent de semnele lor, este o sumă algebrică*.

Pentru a simplifica scrisul, semnul $+$ dintre termeni, care arată adunarea, nu se scrie.

De exemplu, suma numerelor -6 , -2 , -5 , $+3$ și $+4$ se scrie: $-6 -2 -5 +3 +4$.

* Este o urmare a unor denumiri mai vechi, după care numerele pozitive și negative se numeau *numere algebrice*.

Adunarea se exprimă prin simpla alăturare a termenilor.

Prin această scriere simplificată, parantezele dispar. Se spune că *desfacem* parantezele, după regula următoare:

Cînd în fața unei paranteze se găsește semnul +, lăsăm la o parte semnul + și paranteza și luăm numărul din paranteză cu semnul său.

Pentru a calcula suma de mai sus, zicem*:
 $-6 - 2$ face -8 ; ... -5 face -13 ; ... $+3$ face -10 ;
... $+4$ face -6 . Rezultatul este -6 .

Cînd primul termen al unei sume algebrice este pozitiv, semnul + din fața lui se poate neglija. De exemplu, în loc de $+5 - 6$, se poate scrie $5 - 6$.

16. Proprietățile sumei algebrice. 1) *Într-o sumă algebrică putem schimba după voie ordinea termenilor; suma rămîne neschimbată (comutativitate).* (Se înțelege că mutăm termenii cu semnele lor.)
De exemplu:

$$\begin{aligned} -3 + 15 - 6 &= -6; & +15 - 3 - 6 &= -6; \\ -6 + 15 - 3 &= +6. \end{aligned}$$

2) *Într-o sumă algebrică, putem înlocui doi sau mai mulți termeni prin suma lor algebrică; suma rămîne neschimbată (asociativitate).*

De exemplu: Fie suma

$$6 - 2 - 5 + 8 = 7.$$

Dacă înlocuim termenii -5 și $+8$ prin suma lor, care este $+3$, obținem:

$$6 - 2 + 3 = 7,$$

adică aceeași sumă.

* Pentru începător este bine să se dea numerelor o interpretare concretă. De exemplu: în cazul sumei $-6 - 2 - 5 + 3 + 4$, se poate zice: 6 pași spre stînga și 2 pași spre stînga fac 8 pași spre stînga... și cu 5 pași spre stînga fac 13 pași spre stînga ș.a.m.d.

Dacă înlocuim termenii -2 și -5 prin sumele lor, obținem:

$$6 - 7 + 8 = 7,$$

deci tot aceeași sumă.

17. Aplicație. Fie de calculat suma:

$$-18 - 35 + 21 - 64 + 28 - 34.$$

Dacă facem operațiile în ordinea în care sînt scrise, obținem pe rînd rezultatele: -53 , -32 , -96 , -68 , -102 .

Este mai ușor să procedăm astfel: mutăm toți termenii pozitivi în față (folosim proprietatea 1):

$$+21 + 28 - 18 - 35 - 64 - 34.$$

Înlocuim termenii pozitivi prin suma lor și termenii negativi prin suma lor (folosim proprietatea 2):

$$+49 - 151 = -102.$$

În practică, termenii nu se mai transcriu; se ajunge imediat la $+49 - 151$.

18. Scăderea. *A scădea un număr b dintr-un număr a înseamnă a găsi un număr c care, adunat cu b , să dea a :*

$$a - b = c, \text{ dacă } a = b + c.$$

De exemplu: $7 - 3 = 4$, deoarece $3 + 4 = 7$.

Această definiție este valabilă și în cazul cînd numerele a și b sînt numere raționale oarecare, pozitive sau negative.

1) Fie, de exemplu, scăderea:

$$a - (+3).$$

Trebuie să găsim un număr care, adunat cu $+3$, să dea a . Acest număr este $a - 3$, căci, dacă la $a - 3$ adunăm $+3$, obținem:

$$a - 3 + 3 = a.$$

Deci:

$$a - (+3) = a - 3.$$

Au dispărut semnul $-$ și paranteza, iar în locul lui $+3$ a apărut -3 , adică am schimbat semnul lui $+3$.

E x e m p l e.

$$\begin{aligned} +10 - (+4) &= +10 - 4 = +6; \\ +10 - (+13) &= +10 - 13 = -3; \\ -8 - (+6) &= -8 - 6 = -14. \end{aligned}$$

2) Luăm cazul când scăzătorul este negativ, de exemplu:

$$a - (-3).$$

Trebuie să găsim un număr care, adunat cu -3 , să dea a . Acest număr este $a + 3$, căci:

$$a + 3 - 3 = a.$$

Deci:

$$a - (-3) = a + 3.$$

Și acum, semnul din fața parantezei și paranteza au dispărut, iar în locul lui -3 a apărut $+3$, adică am schimbat semnul lui -3 .

E x e m p l e.

$$\begin{aligned} +8 - (-4) &= +8 + 4 = 12; \\ -9 - (-7) &= -9 + 7 = -2. \end{aligned}$$

3) În ambele cazuri, am transformat diferența neefectuată într-o sumă algebrică, desfăcînd paranteza după regula următoare:

Dacă în fața unei paranteze se găsește semnul —, lăsăm la o parte semnul — și paranteza și luăm numărul din paranteză cu semn schimbat.

19. Observări. 1) Am văzut că $a - (+3) = a - 3$. Expresia $a - 3$, la rîndul ei, reprezintă suma $a + (-3)$. Deci:

$$a - (+3) = a + (-3).$$

În mod analog:

$$a - (-3) = a + (+3).$$

Pentru a scădea $+3$, adunăm -3 , iar pentru a scădea -3 , adăugăm $+3$.

Pentru a scădea un număr, se adună opusul lui.

În felul acesta, scăderea se înlocuiește printr-o adunare.

2) Știm că, într-o sumă algebrică, semnele $+$ și $-$ sînt privite ca semnele numerelor, iar semnul adunării se subînțelege, nu se scrie. Acum putem privi lucrurile și altfel. O expresie ca $8 - 3$, de exemplu, se poate înțelege în două feluri: a) din numărul pozitiv 8 se scade numărul pozitiv 3; b) numărul pozitiv 8 se adună cu numărul negativ -3 . În ambele cazuri se obține același rezultat. Dacă expresia se ia în sensul al doilea, ca sumă algebrică, scăderea dispare, ea fiind înlocuită printr-o adunare.

3) Adunarea și scăderea numerelor pozitive și negative se pot explica și astfel:

Într-un registru figurează diferite sume de bani, în două coloane, ca în schema de mai jos. Numerele din prima coloană sînt pozitive, ele reprezintă sume de bani pe care urmează să le primim; numerele din coloana a doua sînt negative, ele reprezintă sume de bani pe care urmează să le plătim. Dacă adăugăm un număr oarecare în prima coloană, de exemplu 30, urmează să mai primim 30 de lei, deci:

$$+ (+30) = +30;$$

+		-
54		82
28		37
75		30
30		25

dacă adăugăm același număr în coloana a doua, urmează să mai plătim 30 de lei, deci:

$$+ (-30) = -30;$$

dacă suprimăm (ștergem) din prima coloană numărul 30, urmează să nu mai primim 30 de lei, deci:

$$- (+30) = -30.$$

În sfârșit, dacă suprimăm din coloana a doua numărul 30, urmează să nu mai plătim 30 de lei, deci:

$$- (-30) = +30*.$$

4) Sîntem obișnuiți să privim adunarea ca o mărire și scăderea ca o micșorare. Lucrurile se schimbă cînd al doilea termen al adunării sau scăderii este negativ.

A aduna un număr pozitiv înseamnă a mări;

a aduna un număr negativ înseamnă a micșora;

a scădea un număr pozitiv înseamnă a micșora;

a scădea un număr negativ înseamnă a mări.

5) Folosirea numerelor negative dă unor cuvinte sensul contrar celui obișnuit. De exemplu, a urca — 20 m înseamnă a coborî cu 20 m, iar a coborî cu —20 m înseamnă a urca cu 20 m; a primi — 100 lei înseamnă a restitui 100 de lei, iar a restitui — 100 lei înseamnă a primi 100 lei.

20. Adunarea și scăderea unei sume

1) Fie de calculat:

$$+12 + (-6 + 2).$$

Trebuie să adunăm 12 cu suma $(-6 + 2)$ care este -4 , adică să calculăm suma: $+12 - 4$, care este $+8$.

* Această justificare nu este completă. Aici se ia scăderea în sensul de a lua, a scoate. Or, nu poți lua decît ceea ce există. Nu putem lua din suma de bani a unui om decît atunci cînd acel om o are; și nu putem lua din pierderea lui decît atunci cînd are pierdere. Justificarea din text este, deci, valabilă numai cînd descăzutul și scăzătorul sînt de același semn.

Știm că, într-o sumă de mai mulți termeni, avem voie să înlocuim doi sau mai mulți termeni prin suma lor. Atunci avem voie să facem și înlocuirea inversă, adică să înlocuim termenul -4 prin suma $-6 + 2$ (care este egală cu -4).

Obținem astfel:

$$+12 - 6 + 2.$$

Dacă comparăm această expresie cu cea dată, observăm că a dispărut semnul $+$ și paranteza, iar numerele din paranteză au apărut cu semnele lor.

2) Fie de calculat:

$$+15 - (8 - 17 + 4).$$

Dacă efectuăm suma din paranteză, obținem

$$15 - (-5) = 15 + 5 = 20.$$

Ajungem la același rezultat dacă procedăm astfel: lăsăm la o parte semnul $-$ și paranteza, și schimbăm semnele tuturor numerelor din paranteză, ca atunci când între paranteze figurează un singur număr:

$$15 - 8 + 17 - 4 = 20^*.$$

1) Când în fața unei paranteze se găsește semnul $+$ lăsăm la o parte semnul $+$ și paranteza și luăm numerele din paranteză cu semnele lor.

2) Când în fața unei paranteze se găsește semnul $-$ lăsăm la o parte semnul $-$ și paranteza și schimbăm semnele tuturor numerelor din paranteză.

* Semnul $-$ care apare în fața numărului 8 nu este semnul $-$ din fața parantezei. Numărul 8 are semnul $+$ (necris); schimbând acest semn, se obține -8 . Semnul $-$ din fața parantezei dispăre.

Observare. Această regulă se aplică și în cazul numerelor mixte, deși nu se folosesc paranteze. De exemplu:

$$3 - 5 \frac{2}{7} = 3 - \left(5 + \frac{2}{7} \right) = 3 - 5 - \frac{2}{7} = -2 - \frac{2}{7} = -2 \frac{2}{7}.$$

21: Înmulțirea. Înmulțirea numerelor raționale se face ca în exemplele următoare:

$$\begin{aligned} (+3)(+4) &= +12; & (+5)(-4) &= -20; \\ (-2)(+3) &= -6; & (-3)(-5) &= +15. \end{aligned}$$

Regulă. Pentru a înmulți două numere raționale, se înmulțesc valorile lor absolute, iar în fața rezultatului se pune semnul dat de regula semnelor, și anume:

$$\begin{aligned} (+)(+) &= (+); & (+)(-) &= (-); & (-)(+) &= (-); \\ (-)(-) &= (+). \end{aligned}$$

Regula semnelor se mai poate exprima astfel:
Dacă cei doi factori au același semn, produsul are semnul +; dacă factorii au semne diferite, produsul are semnul -.

22. Aplicație. Când un punct se mișcă cu o viteză de v metri pe minut, drumul pe care-l parcurge în t minute se află înmulțind viteza cu timpul. Dacă notăm drumul cu s , avem formula:

$$s = vt.$$

Exemplu. Un biciclist face 200 m pe minut. Ce distanță face el în 8 minute? Avem: $v = 200$, $t = 8$, formula ne dă:

$$s = 200 \cdot 8 = 1\,600.$$

În 8 minute biciclistul face 1 600 m.

Formula $s = vt$ are, deocamdată, sens numai când s , v și t sînt numere pozitive. Dar distanța, viteza și timpul se pot exprima și prin numere negative.

Presupunem că șoseaua are direcția vest-est; luăm ca sens pozitiv sensul de la vest spre est. Fie O un punct de pe șosea, pe care-l luăm ca origine (fig. 11). Dacă un punct este situat la est de O , distanța de la O pînă la el se exprimă printr-un număr pozitiv, iar dacă punctul este la vest de O , distanța se exprimă printr-un număr negativ. De exemplu: $OA = +100$ m; $OB = -120$ m. Când biciclistul merge în sens pozitiv (spre est), viteza sa se exprimă printr-un număr pozitiv, iar când merge în sens negativ (spre vest), ea se exprimă printr-un număr negativ. De exemplu, când biciclistul merge spre est și face 150 m pe minut avem $v = +150$, când biciclistul merge spre vest și face 150 m pe minut, $v = -150$.

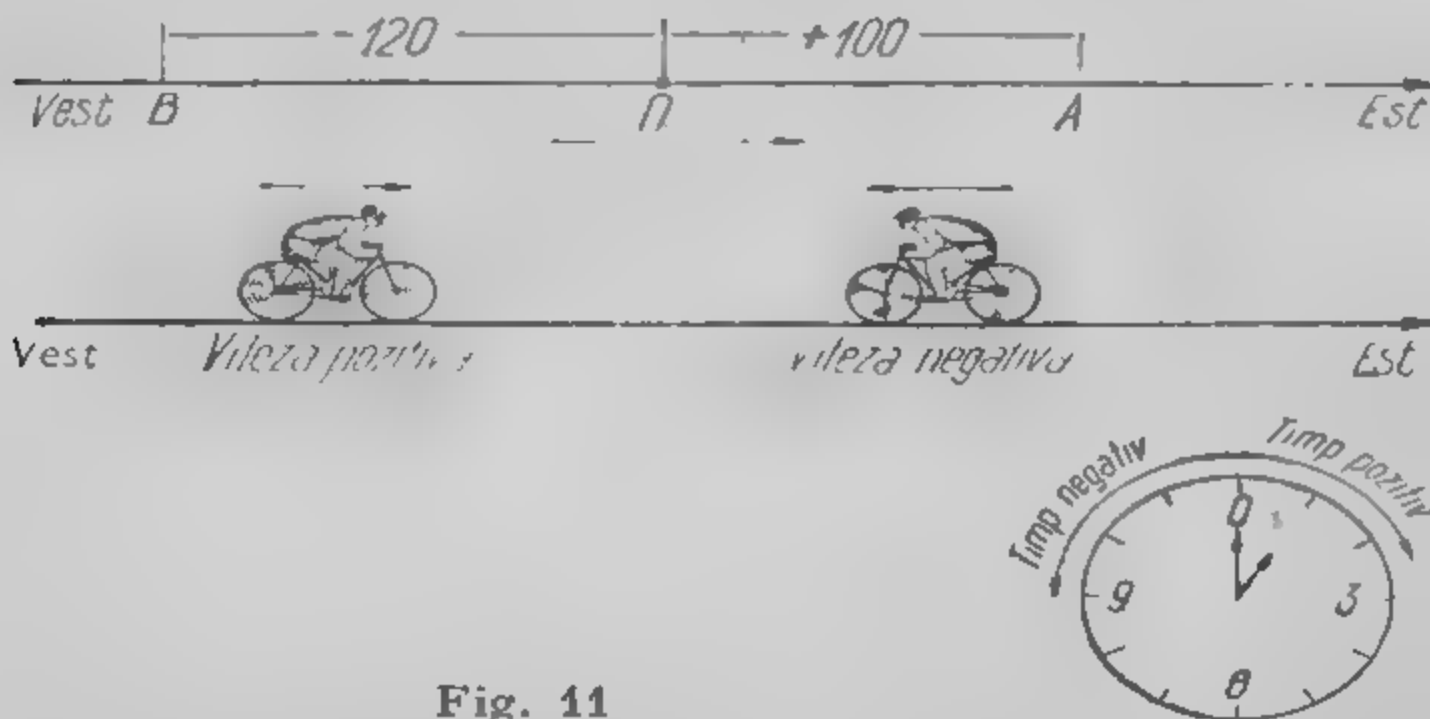


Fig. 11

Potrivim ceasul astfel încît să arate ora zero în momentul în care biciclistul trece prin punctul O . Timpul de după acest moment se exprimă printr-un număr pozitiv, iar timpul dinaintea acestui moment, printr-un număr negativ. De exemplu, $t = +5$ înseamnă că au trecut 5 minute de cînd biciclistul a trecut prin O , iar $t = -5$ înseamnă că mai sînt 5 minute pînă cînd biciclistul va trece prin O .

În primele cinci coloane sînt trecute datele problemei, iar în coloana a șaptea am scris valoarea lui s calculată

Tabelul de mai jos arată diferite cazuri posibile

1	2	3	4	5	6	7	8
În ce direcție merge biciclistul	Câți metri face pe min	$v =$	Momentul considerat	$t =$	Unde se află biciclistul	$s =$	Verificarea formulei $vt = s$
De la vest spre est →	200	+ 200	5 min după ce a trecut prin O	+ 5	Cu 1 000 m la est de O	+ 1 000	$(+ 200) \cdot (+ 5) = + 1\,000$
De la vest spre est →	200	+ 200	5 min înainte de a trece prin O	- 5	Cu 1 000 m la vest de O	- 1 000	$(+ 200) \cdot (- 5) = - 1\,000$
De la est spre vest ←	200	- 200	5 min după ce a trecut prin O	+ 5	Cu 1 000 m la vest de O	- 1 000	$(- 200) \cdot (+ 5) = - 1\,000$
De la est spre vest ←	200	- 200	5 min înainte de a trece prin O	- 5	Cu 1 000 m la est de O	+ 1 000	$(- 200) \cdot (- 5) = + 1\,000$

pe baza judecății exprimate în coloana a șasea. În ultima coloană am calculat s cu ajutorul formulei $vt = s$. Se constată că, în toate cazurile, formula dă rezultatul adevărat.

Formula $s = vt$ a fost stabilită inițial numai pentru cazul când v și t sînt numere pozitive. Datorită regulii de înmulțire a numerelor pozitive și negative, aceeași formulă rămîne valabilă și în cazul când viteza și timpul, sau numai una din ele, se exprimă printr-un număr negativ.

23. Înmulțirea cu zero. Fie, de exemplu, înmulțirea $(-5) \cdot 0$. Conform regulii, trebuie să înmulțim valorile absolute, adică 5 cu 0 ceea ce dă 0. Deci $(-5) \cdot 0 = 0$.

Dacă unul din factorii unui produs este zero, produsul este zero.

Dacă înmulțim doi factori dintre care nici unul nu este zero obținem un produs diferit de zero.

Un produs este egal cu zero numai dacă cel puțin unul din factori este egal cu zero.

24. Produs de mai mulți factori. Fie, de exemplu, înmulțirea:

$$(-2)(-5)(+3)(-6) = ?$$

Socotim astfel: $(-2)(-5) = +10$;

$$(+10)(+3) = +30; (+30)(-6) = -180.$$

Rezultatul este: -180 .

În practică se poate proceda astfel: întîi stabilim semnul: $(-)$ cu $(-)$ dă $(+)$; ... cu $(+)$ dă $(+)$; ... cu $(-)$ dă $(-)$. Seriem semnul $(-)$. Apoi aflăm valoarea absolută a rezultatului: $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 = 180$. După semnul minus seriem 180. Obținem astfel rezultatul -180 .

25. Proprietățile înmulțirii. Înmulțirea numerelor raționale are aceleași proprietăți ca înmulțirea numerelor pozitive.

1) *Înmulțirea este comutativă.* Aceasta înseamnă că, dacă schimbăm ordinea factorilor, produsul rămâne neschimbat. Formula $ab = ba$ este adevărată când a și b sînt numere raționale oarecare, pozitive sau negative.

E x e m p l e.

$$(-3) \cdot (+5) = -15; (+5) \cdot (-3) = -15;$$

$$\left(+\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(+10) = -\frac{4}{3};$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(+10)\left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{4}{3}.$$

2) *Înmulțirea este asociativă.* Aceasta înseamnă: dacă $a)$ înlocuim doi factori prin produsul lor, sau $b)$ înlocuim un factor printr-un produs egal cu el, produsul final rămâne neschimbat.

E x e m p l u. Fie înmulțirea:

$$(+3)(-5)(+2)(-4).$$

Avem: $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = 120$; $(+)$ cu $(-)$ dă $(-)$; ... cu $(+)$ dă $(-)$; ... cu $(-)$ dă $(+)$.

Rezultatul este: $+120$. Dacă înlocuim ultimii doi factori prin produsul lor, care este -8 , obținem:

$$(+3)(-5)(-8) = +120,$$

adică același rezultat.

Invers, dacă în acest produs înlocuim factorul -8 prin produsul $(+2)(-4)$, obținem produsul inițial, deci tot $+120$.

3) *Înmulțirea este distributivă față de adunare.* Aceasta înseamnă că, pentru a înmulți o sumă cu un număr, înmulțim fiecare termen al sumei cu numărul și facem suma produselor. Prin sumă se înțelege sumă *algebrică*.

Aceasta se exprimă prin formula:

$$(a + b)m = am + bm,$$

unde a , b și m sînt numere raționale oarecare (pozitive sau negative).

E x e m p l u. Fie înmulțirea:

$$(-2 + 9 - 3) \cdot (-5).$$

Dacă efectuăm întâi suma algebrică din prima paranteză, avem: $-2 + 9 - 3 = +4$, $(+4) \cdot (-5) = -20$. Rezultatul este -20 .

Dacă înmulțim întâi fiecare termen al sumei cu -5 , adică aplicăm regula de mai sus, avem:

$$(-2)(-5) = +10; (+9)(-5) = -45;$$

$$(-3)(-5) = +15; +10 - 45 + 15 = -20.$$

Am obținut același rezultat ca mai înainte.

Dacă citim formula de mai sus de la dreapta spre stînga, ea ne arată următoarele: *Dacă toți termenii unei sume conțin același factor, acel factor poate fi scos în fața parantezei, ca factor comun.*

26. Ridicarea la putere. Această operație este, după cum se știe, o înmulțire repetată.

E x e m p l u. $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$;
 $(+3)^4 = (+3)(+3)(+3)(+3) = +81$; $(-10)^5 = -100\,000$.

Cu privire la semnul puterii unui număr, se observă următoarele:

$$(+2)^2 = +4; (-2)^3 = -8; (+2)^4 = +16 \text{ ș.a.m.d.}$$

$$(-2)^2 = +4; (-2)^3 = -8; (-2)^4 = +16 \text{ ș.a.m.d.}$$

Un număr pozitiv, ridicat la orice putere, dă tot un număr pozitiv. Un număr negativ ridicat la o putere pară (cu soț), dă un număr pozitiv, iar ridicat la o putere impară (fără soț), dă un număr negativ.

27. **Împărțirea.** Ca și în cazul numerelor pozitive, a împărți un număr a printr-un număr b înseamnă a găsi un număr c care, înmulțit cu b , să dea a .

$$a : b = c, \text{ dacă } bc = a.$$

Fie, de exemplu, de făcut împărțirea:

$$(+12) : (-3).$$

Valoarea absolută a cîtului trebuie să fie 4, căci $4 \cdot 3 = 12$.

Să stabilim semnul cîtului. Dacă punem în fața lui 4 semnul $+$ și facem proba, avem: $(+4) \cdot (-3) = -12$; deîmpărțitul este $+12$, deci n-am ales bine semnul. Să punem în fața lui 4 semnul $-$; facem proba: $(-4) \cdot (-3) = +12$. Am obținut deîmpărțitul. Deci:

$$(+12) : (-3) = -4.$$

În același fel se stabilește, de exemplu, că:

$$(+12) : (+3) = +4; \quad (-12) : (+3) = -4;$$

$$(-12) : (-3) = +4.$$

Pentru a împărți un număr rațional printr-un alt număr rațional se împarte valoarea absolută a deîmpărțitului prin valoarea absolută a împărțitorului, iar în fața cîtului se pune semnul dat de regula semnelor, care este aceeași ca la înmulțire.

Exemple. $(-18) : (+2) = -9$; $(-3) : (-4) =$

$$= +\frac{3}{4}; \quad 1\frac{3}{5} : \left(-1\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{5} : \left(-\frac{4}{3}\right) =$$

$$= -\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}.$$

.Cînd împărțitorul este zero, împărțirea nu se poate face.

28. Proprietățile împărțirii. 1) *Împărțirea este distributivă față de adunare.* Aceasta înseamnă ca, pentru a împărți o sumă printr-un număr, se împarte fiecare termen al sumei prin acel număr și se face suma cîturilor. Prin sumă se înțelege *sumă algebrică*.

E x e m p l u. Fie împărțirea:

$$(15 + 24 - 12) : (-3) = ?$$

Dacă efectuăm mai întîi suma algebrică din paranteză, avem:

$$15 + 24 - 12 = 27; (+27) : (-3) = -9.$$

Dacă aplicăm regula de mai sus, obținem:

$$(+15) : (-3) = -5; (+24) : (-3) = -8;$$

$$(-12) : (-3) = +4; -5 - 8 + 4 = -9.$$

Am obținut același rezultat ca mai înainte.

2) *Împărțirea unui produs.* Pentru a împărți un produs printr-un număr, se împarte unul din factorii produsului prin acel număr, iar cîtul se înmulțește cu ceilalți factori.

E x e m p l u. Fie împărțirea:

$$[(+6)(-2)(-10)] : (-2).$$

Avem:

$$(+6)(-2)(-10) = +120; (+120) : (-2) = -60$$

Dacă împărțim primul factor prin (-2) , avem:

$$(+6) : (-2) = -3; (-3)(-2)(-10) = -60;$$

dacă împărțim factorul al doilea prin (-2) , avem:
 $(-2):(-2) = +1$; $(+1)(+6)(-10) = -60$;
 dacă împărțim factorul al treilea avem:
 $(-10):(-2) = +5$; $(+6)(-2)(+5) = -60$.

În toate cazurile s-a obținut același rezultat.

29. Ordinea operațiilor. Cele învățate la aritmetică în legătura cu ordinea operațiilor sînt valabile și în cazul cînd se operează cu numere raționale oarecare, pozitive și negative.

Operațiile se împart în trei grupe:

operații de ordinul I: adunarea și scăderea;

operații de ordinul II: înmulțirea și împărțirea;

operații de ordinul III: ridicarea la putere și extragerea rădăcinii.

Ordinea operațiilor este dată de regulile* următoare:

1. *În cazul unui șir de adunări și scăderi, operațiile se efectuează în ordinea în care sînt scrise.*

2. *Cînd operațiile sînt de ordine diferite, se efectuează întîi cele de ordin mai ridicat.*

E x e m p l e. 1. Fie de calculat:

$$2(-3) + (-1)(+5) - (+4)(+3).$$

Avem de efectuat adunări și scăderi (ordinul I) și înmulțiri (ordinul II); efectuăm întîi înmulțirile, care sînt de un ordin mai ridicat. Avem:

$$-2(-3) = +6, \quad (-1)(+5) = -5, \\ (+4)(+3) = +12$$

și expresia devine:

$$+6 + (-5) - (+12).$$

* Aceste reguli nu se demonstrează, este vorba de o convenție.

Desfacem parantezele:

$$+ 6 - 5 - 12,$$

și calculăm această sumă algebrică; obținem rezultatul $- 11$.

În practică, lucrările se fac mai rapid. Se zice: $- 2(- 3) = + 6$; $(- 1)(+ 5) = - 5$; dat fiind că în fața parantezei avem semnul $+$, rămîne $- 5$; $(+ 4)(+ 3) = + 12$; dat fiind că în fața parantezei avem semnul $-$, scriem $- 12$. Aceste operații se fac în gînd și apare direct suma algebrică $+ 6 - 5 - 12$.

$$2. \quad 3(+ 2)^2 - (- 1)(- 5)(- 3) + (- 2)(- 3)^2(+ 2).$$

Efectuăm întîi ridicările la putere, care sînt operațiile de ordinul cel mai ridicat:

$$(+ 2)^2 = + 4, \quad (- 3)^2 = + 9.$$

Operațiile celelalte, care nu s-au efectuat încă, se transcriu. Expresia devine:

$$3(+ 4) - (- 1)(- 5)(- 3) + (- 2)(+ 9)(+ 2).$$

Acum efectuăm toate înmulțirile, ținînd seama de semnul din fața fiecărui produs:

$$3(+ 4) = + 12; \quad (- 1)(- 5)(- 3) = - 15$$

și, deoarece acest produs are semnul $-$ în fața, scriem $+ 15$;

$(- 2)(+ 9)(+ 2) = - 36$ și, deoarece în fața acestui produs figurează semnul $+$, rămîne $- 36$. Obținem astfel suma algebrică

$$+ 12 + 15 - 36 = - 9.$$

În practică, se poate ajunge direct la ultima sumă algebrică, procedînd astfel: în primul termen avem un număr pozitiv de ridicat la patrat,

ceea ce va da un rezultat pozitiv; cum în fața acestui termen avem semnul $+$ (nici un semn), rezultatul va fi pozitiv; $2^2 - 4$; $3 \cdot 4 = 12$; scriem $+12$. Al doilea termen este un produs de trei factori; $-$ (de la -1) cu $-$ (de la -5) dă $+$; ... cu $-$ (de la -3) dă $-$; cum în fața acestui produs avem semnul $-$, rezultatul va fi pozitiv; $1 \cdot 5 =$

5 , $5 \cdot 3 = 15$; scriem $+15$. Trecem la termenul al treilea. Avem un număr negativ de ridicat la pătrat, ceea ce dă un rezultat pozitiv; $-$ (de la -2) cu $+$ de la $(-3)^2$ dă $-$; ... cu $+$ (de la $+2$) dă $-$; cum în fața acestui produs avem semnul $+$, rămâne $-$; $3^2 - 9$, $2 \cdot 9 \cdot 2 = 36$; deci 36 . Obținem astfel: $+12 + 15 - 36 = -9$.

30. Paranteze. Când o expresie conține paranteze, se efectuează întâi operațiile din paranteze. Când o expresie conține paranteze obișnuite și paranteze mari*, se efectuează întâi operațiile din parantezele obișnuite.

Când expresia conține și acolade, se efectuează întâi operațiile din parantezele obișnuite, apoi operațiile din parantezele mari și la urmă operațiile din acolade.

Exemple. 1. Fie expresia:

$$[3(-5) - 2]^2 - [(- 2)(- 4) + (-4)^2].$$

Efectuăm întâi expresiile din parantezele obișnuite, apoi operațiile din parantezele mari; obținem:

$$[-15 - 2]^2 - [(+8) + (+16)] = [-17]^2 - [+24] = +289 - 24 = +265.$$

Când trebuie închisă în paranteze o expresie care conține paranteze obișnuite (rotunde) se folosesc paranteze mari [...]. Când expresia conține deja paranteze mari, se folosesc acolade {....}

$$\begin{aligned}
 & 2. \{[-5(-2) \div 3(-2)^2]^3 - [2(-3)^3 - \\
 & - 7(-3)]\}^2 = \{[-10 - 12]^3 - [-54 + 21]\}^2 = \\
 & = \{[-22]^3 - [-33]\}^2 = \{-8 + 33\}^2 = \{+25\}^2 = \\
 & = +625.
 \end{aligned}$$

31. Observare. Când o expresie conține mai multe operații, o numim după *ultima* operație, care urmează a fi efectuată după regulile despre ordinea operațiilor.

E x e m p l e. 1. Expresia $3x + 5y$ este o sumă și anume suma termenilor $3x$ și $5y$, deși conține și înmulțiri.

2. Expresia $(a + 2)(2a - 3)$ este un produs, și anume produsul factorilor $(a + 2)$ și $(2a - 3)$.

32. Valoarea numerică a unei expresii algebrice. Când într-o expresie algebrică înlocuim literele prin numere și efectuăm operațiile indicate de acea expresie, se obține *valoarea numerică* a acelei expresii. În efectuarea calculelor, se ține seamă de regulile privitoare la ordinea operațiilor.

E x e m p l e. 1. Să calculăm valoarea expresiei

$$3x^2 - 5x$$

pentru $x = -\frac{3}{4}$.

Operația de ordinul cel mai ridicat din această expresie este ridicarea la pătrat; această operație se efectuează întâi:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ și se scrie:}$$

$$3x^2 - 5x = 3 \cdot \frac{9}{16} - 5 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{16} + \frac{15}{4} = \frac{87}{16} = 5\frac{7}{16}.$$

2. Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$(5a^2 - 3b) : (2a - 3b^2)$$

pentru $a = -3$, $b = +5$.

Efectuăm mai întâi ridicările la pătrat $(-3)^2 = +9$, $(+5)^2 = +25$, și obținem pe rînd:

$$\begin{aligned} & [5(+9) - 3(+5)] : [2(-3) - 3(+25)] = \\ & = [+45 - 15] : [-6 - 75] = 30 : [-81] = \\ & = -\frac{30}{81} = -\frac{10}{27}. \end{aligned}$$

33. Expresia algebrică ca funcție de literele pe care le conține. Să considerăm, de exemplu, expresia:

$$3x - 5y.$$

Dînd literelor x și y diferite valori, această expresie capătă diferite valori numerice. Astfel, pentru $x = -1$, $y = +4$, ea capătă valoarea

$$3x - 5y = -3 - 20 = -23;$$

pentru $x = +6$, $y = -0,4$, ea capătă valoarea

$$3x - 5y = 18 + 2 = 20;$$

pentru $x = -\frac{5}{6}$, $y = 0$, ea capătă valoarea

$$3x - 5y = 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) - 5 \cdot 0 = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2} \text{ ș.a.m.d.}$$

Aceste rezultate se pot strînge într-un tabel ca următorul:

x	-1	$+6$	$-\frac{5}{6}$
y	4	$-0,4$	0
$3x - 5y$	-23	$+20$	$-\frac{5}{2}$

Fiecarei perechi de valori ale literelor x și y îi corespunde o anumită valoare a expresiei. Se

spune că expresia algebrică este o funcție de aceste litere.

34. Valori pentru care o expresie algebrică își pierde sensul. Considerăm expresia

$$3x : (x - 2).$$

Dând literei x diferite valori, se obține câte o valoare numerică a expresiei. Dacă punem însă $x = 2$, obținem

$$6 : (2 - 2) = 6 : 0.$$

Dar împărțirea prin zero nu se poate face. În adevăr, a împărți, de exemplu, 6 prin 0 înseamnă a găsi un număr care, înmulțit cu 0, să dea 6; dar un asemenea număr nu există, căci orice număr, înmulțit cu zero, dă zero, nu 6.

Așadar, când $x = 2$, expresia noastră nu are nici o valoare numerică. Se spune că, pentru $x = 2$, această expresie *nu are sens*.

O expresie algebrică care conține o împărțire își pierde sensul pentru acele valori ale literelor pentru care împărțitorul devine zero.

35. **Rezumat.** Cele patru operații cu numere pozitive și negative se pot exprima astfel:

Adunarea: $+(+ \dots) = + \dots$; $-(- \dots) = + \dots$

Scăderea: $-(+ \dots) = - \dots$; $-(- \dots) = + \dots$

Înmulțirea: $(+ \dots)(+ \dots) = + \dots$;

$(+ \dots)(- \dots) = - \dots$;

$(- \dots)(+ \dots) = - \dots$;

$(- \dots)(- \dots) = + \dots$

Împărțirea: ca la înmulțire.

36. **Observare.** Sub forma aceasta, regulile operațiilor se pot aplica și în cazul când numerele sînt reprezentate prin litere și nu știm dacă ele sînt pozitive sau negative.

Să considerăm, de exemplu, înmulțirea $(+ x)(- y)$, unde nu știm dacă x este un număr pozitiv sau negativ,

nici dacă y este pozitiv sau negativ. Totuși aplicând regula semnelor, putem scrie:

$$(+x)(-y) = -xy$$

și rezultatul va fi bun în toate cazurile.

Ca să dovedim aceasta, trebuie să considerăm mai multe cazuri:

1) x și y sînt pozitivi. În acest caz, $+x$ este pozitiv, y este negativ, deci produsul trebuie să fie negativ. Rezultatul $(-xy)$ este bun, căci xy este pozitiv (ca produs de numere pozitive), iar $-xy$ este negativ.

2) x și y sînt negativi. În acest caz, $-x$ este negativ, y este pozitiv, deci produsul trebuie să fie negativ. Rezultatul $(-xy)$ este bun, căci xy este pozitiv (ca produs de două numere de același semn), iar $-xy$ este negativ.

3) x este pozitiv, iar y este negativ. În acest caz, $+x$ este pozitiv, $-y$ este de asemenea pozitiv și produsul trebuie să fie pozitiv. Rezultatul $(+xy)$ este bun, căci xy este negativ (ca produs de două numere de semne contrare), iar $+xy$ este pozitiv.

4) x este negativ, iar y este pozitiv. În acest caz, $-x$ este pozitiv, $-y$ este de asemenea negativ, deci produsul trebuie să fie negativ.

Rezultatul $(-xy)$ este bun, căci xy este negativ (ca produs de două numere de semne contrare), iar $-xy$ este pozitiv.

Așadar, regula semnelor dă rezultate bune în toate cazurile. Cînd aplicăm această regulă, nu este necesar să știm dacă literele reprezintă numere pozitive sau negative. Exprimată sub forma de mai sus, regula semnelor dă mai mult decît regula de la pagina 31.

Aceeași observare este valabilă și pentru celelalte operații.

EXERCIIU

Numere pozitive și negative

1. Să se exprime cu ajutorul unui număr pozitiv sau negativ: *a*) un beneficiu de 800 de lei; *b*) anul 102 î.e.n.; *c*) o ieftinire cu 25 de lei; *d*) 800 m sub nivelul mării; *e*) o depășire a nor-

mei cu 250 de piese; *f*) o sumă de 15 lei pe care trebuie s-o dăm cuiva; *g*) anul 1848 e.n.; *h*) o forță care trage înainte cu 500 de kg; *i*) o forță care trage înapoi cu 200 kg.

2. În tabelul de mai jos sînt date longitudinea și latitudinea unor puncte de pe glob *. Să se exprime aceste marimi prin numere pozitive sau negative.

<i>Orașul</i>	<i>Longitudinea</i>	<i>Latitudinea</i>
București	26° est	44°30' nord
Moscova	37° est	55° nord
Cairo	32° est	30° nord
Rio de Janeiro	43° vest . .	22° sud
Chicago	89° vest	41° nord
Leningrad	30° est	60° nord
Tokio	140° est	36° nord
Melbourne	145° est	37° sud

3. În cursul unei zile, termometrul a arătat temperaturile următoare:

<u>Ora</u>	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
<u>Tempe- ratura</u>	5°	8°	9°	12°	15°	20°	25°	25°	24°	21°	13°	16	15°

Să se facă un tabel ca cel de mai jos, indicînd printr-un număr pozitiv sau negativ cum a variat temperatura în cursul fiecărei ore:

<u>Intervalul de timp</u>	8—9	9—10	10—11	11—12	...
<u>Variația temperaturii</u>	+3				

4. Un ascensor pornește de la parter, urcă *a* metri și apoi coboară cu *b* metri. La câți metri

* Longitudinile și latitudinile sînt date cu aproximație.

de la parter s-a oprit? Să se introducă în formulă valorile următoare și să se efectueze scăderea: $a) a = 12, b = 4$; $b) a = 6, b = 10$. Ce înțeles are rezultatul negativ?

5. Un eveniment a avut loc în anul a , iar un alt eveniment cu b ani înaintea lui. În ce an a avut loc evenimentul al doilea? Aplicație numerică: $1) a = 1945, b = 6$; $2) a = 50, b = 90$. Ce înțeles are rezultatul negativ?

6. Să se reprezinte pe axa numerelor, următoarele numere (se va lua ca unitate 1 cm): $+4$; $-3,8$; $-2,9$; $+1$; $+3,7$; $-1,8$.

7. Ce abscisă are punctul situat: $a)$ cu 3 unități la dreapta punctului $+7$; $b)$ cu 5 unități la stînga punctului $+11$; $c)$ cu 4 unități la stînga punctului -3 ; $d)$ cu 5 unități la dreapta punctului -11 ; $e)$ cu 8 unități la dreapta punctului -2 ; $f)$ cu 7 unități la stînga punctului $+2$?

8. Să se reprezinte pe axa numerelor: $+1$ și -1 ; $+2$ și -2 ; ... Cum sînt așezate aceste puncte față de origine? Cîte puncte (deosebite de origine) există pe axa numerelor care să reprezinte numere cu aceeași valoare absolută? Cum sînt distanțele lor de la origine?

9. Să se arate care este valoarea absolută a fiecaruia dintre numerele următoare: -3 ; 5 ; $+2,8$; $-5\frac{2}{3}$; 12 ; -1 .

E x e m p l u. $|-6| = 6$.

10. Să se copieze următoarele perechi de numere și să se pună între ele semnul $>$ sau $<$, după cum este cazul:

$a) +5$ și $+6$; $b) -32$ și -10 ; $c) +3$ și -8 ;
 $d) +5$ și 0 ; $e) -8$ și 0 ; $f) -11$ și $+10$;
 $g) 0$ și -3 ; $h) 0$ și $+3$; $i) +12$ și $+8$.

11. Să se scrie în ordine crescătoare următoarele numere: $+8$, $-2,5$, -7 , $+3\frac{1}{2}$, $-2\frac{4}{9}$, $+4,7$.

12. Să se scrie în ordine descrescătoare numerele:

$$4, -11, +3, +25, -7,9, +3\frac{7}{8}.$$

13. Se consideră inegalitățile:

$$+7 > +6, -6 > -7, +3 < -10, 3 < 0, +3 > 0.$$

Să se interpreteze aceste inegalități considerînd că numerele reprezintă: *a*) abscisele a două puncte de pe o dreaptă pe care s-a ales o origine, iar ca sens pozitiv sensul de la stînga spre dreapta; *b*) altitudinile a două localități, socotite de la nivelul mării; *c*) două date istorice; *d*) două longitudini; *e*) două latitudini.

Adunarea

11. Să se efectueze adunările:

$$a) (+12) + (+6); \quad b) (-15) + (-18);$$

$$c) (-2,9) + (-3,6); \quad d) \left(+5\frac{3}{4}\right) + \left(+3\frac{1}{4}\right);$$

$$e) (-18) + (+7); \quad f) (+8,5) + (-2,4);$$

$$g) (+6) + (-1); \quad h) (-18) + (+12).$$

Fiecare exercițiu se va interpreta (oral) în mai multe feluri. Exemplu: $(+15) + (-6)$. Interpretarea I: Înaintez cu 15 m, apoi merg înapoi cu 6 m. Rezultatul este o înaintare cu 9 m. Rezultatul este: $+9$. Interpretarea II: O creștere cu 15 unități este urmată de o scădere cu 6 unități. Rezultă o creștere cu 9 unități.

$$14. \quad a) +18; \quad b) -33; \quad c) -6,5; \quad d) +9; \quad e) -11; \\ f) +6,1; \quad g) +5; \quad h) -6.$$

15. Să se calculeze*:

- a) $+7 + 3$; b) $+7 - 3$; c) $7 + 3$;
 d) $-7 - 3$; e) $-5 - 0,8$; f) $6,2 + 3,5$;
 g) $+12 - 12,3$; h) $+0,8 - 0,2$; i) $-3 + 0,15$;
 j) $+5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$; k) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; l) $+3\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2}$;
 m) $-6\frac{3}{8} - 2\frac{3}{4}$.

16. Să se calculeze:

- a) $6 + 8 - 1 - 4 + 3 - 5$; b) $15 - 6 - 3 - 8 - 1$;
 c) $+16 - 7 - 5 - 4 - 8 + 9 - 1$;
 d) $-1 + 6 + 3 - 10 - 4 + 2 + 7 - 15$;
 e) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} - \frac{2}{3}$;
 f) $-\frac{7}{9} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$;
 g) $-\frac{11}{12} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8}$;
 h) $\frac{14}{18} - \frac{7}{24} - \frac{11}{12} + \frac{5}{9} - \frac{3}{8}$;
 i) $5\frac{3}{8} - 2\frac{3}{4} - 4\frac{5}{6} + 2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{6}$;
 j) $3\frac{7}{24} - 1\frac{9}{16} + 2\frac{5}{12} - 4\frac{5}{6} + 6\frac{3}{8}$.

* Vezi nota de la § 15.

16. a) -5 ; b) -33 ; c) 0 ; d) -12 ; e) $-\frac{1}{2}$; f) $+\frac{11}{36}$;
 g) $+\frac{5}{24}$; h) $-\frac{1}{4}$; i) $-\frac{17}{24}$; j) $5\frac{11}{16}$.

Calcululele se vor face în două moduri: *a)* operațiile se efectuează în ordinea în care sînt scrise; *b)* se adună deosebit termenii pozitivi și deosebit cei negativi.

17. Să se calculeze suma $x + y$, cînd x și y au valorile indicate în tabelul de mai jos. Se va completa rîndul al treilea.

x	8,3	+ 5	$\frac{3}{8}$	- 5 218	$5 \frac{3}{11}$	- 8,25	0
y	+ 2,5	- 2	$\frac{1}{4}$	+ 3 104	- 2 $\frac{8}{11}$	- 3 $\frac{1}{4}$	- 17
$x + y$							

18. Să se compună o problemă în care să fie vorba de ridicarea și coborîrea temperaturii și care să se rezolve: *a)* prin adunarea a două numere pozitive; *b)* prin adunarea unui număr pozitiv cu un număr negativ; *c)* prin adunarea a două numere negative.

19. Abscisa unui punct A este $x = + 5$. Un punct B este situat cu $y = 3$ unități la dreapta lui A . Să se afle abscisa punctului B . Să se dea răspunsul sub formă de formula și să se dea literelor x și y valorile următoare (se va face pentru fiecare caz o schiță): *a)* $x = + 8$, $y = 12$; *b)* $x = 6$, $y = 2$; *c)* $x = 4$, $y = 9$; *d)* $x = 3$, $y = 3$.

20. Un om s-a născut în anul a și a trăit b ani. În ce an a murit? Să se dea rezultatul sub formă de formulă. Să se dea apoi literelor valorile care corespund cazurilor următoare și să se calculeze anul morții:

a) N. Balcescu s-a născut în anul 1819 și a trăit 33 de ani;

b) Socrate s-a născut în anul 469 î.e.n. și a trăit 70 de ani;

c) Ovidiu s-a născut în anul 43 î.e.n. și a trăit 60 de ani.

21. Asupra unui punct acționează două forțe de aceeași direcție, una de a kg, iar cealaltă de b kg. Să se calculeze rezultanta lor. Să se înlocuiască a și b prin valorile următoare și să se explice rezultatul: $a = +10$, $b = +4$; $a = +10$, $b = -4$; $a = -10$, $b = +4$; $a = -10$, $b = -4$.

Scăderea

22. Să se înlocuiască punctele din egalitățile următoare printr-un număr potrivit, astfel ca egalitățile să fie adevărate:

$$a) (+15) + (...) = +23; \quad b) (...) + (+6) = -8;$$

$$c) (+7) + (...) = -10; \quad d) (-10) + (...) = -15.$$

23. Să se efectueze scăderile următoare:

$$a) (+15) - (+4); \quad b) (+18) - (-6);$$

$$c) (-10) - (+3); \quad d) (-12) - (-1);$$

$$e) (-3,8) - (+1,5); \quad f) \left(+\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right).$$

24. Asupra unui punct acționează două forțe de aceeași direcție. Rezultanta lor este de a kg, iar una din ele este de b kg. Să se afle cealaltă forță. Să se dea literelor a și b valorile următoare și să se explice rezultatul: $a = +13$, $b = 8$; $a = +13$, $b = -20$; $a = +13$, $b = 8$; $a = -13$, $b = 20$; $a = 13$, $b = +4$.

25. Un om s-a născut în anul a și a murit în anul b . Câți ani a trăit? Să se exprime rezultatul în litere și să se aplice la cazurile următoare, pentru a calcula câți ani a trăit:

- a)* Eminescu (1850...1889);
- b)* Arhimede (287 î.e.n. ... 213 î.e.n.).

26. Ce înțeles pot avea expresiile următoare:
a) vremea s-a răcit cu -3° ; *b)* un obiect s-a scumplit cu -5 lei; *c)* mașina a plecat cu 10 minute mai târziu; *d)* ziua s-a mărit cu -15 minute; *e)* dintr-o clasă au plecat -6 elevi.

27. Cum este suma a doi termeni în comparație cu primul ei termen (mai mare sau mai mică), dacă: *a)* termenul al doilea este pozitiv; *b)* termenul al doilea este negativ? Să se dea exemple.

28. Cum este diferența a două numere în comparație cu descăzutul (mai mare sau mai mică), dacă: *a)* scăzătorul este pozitiv; *b)* scăzătorul este negativ. Să se dea exemple.

29. Să se scrie următoarele expresii sub formă de sumă algebrică (fără paranteze) și apoi să se efectueze:

- a)* $(+12) + (-6) - (-4) - (+8) - (+3) + (-6)$;
- b)* $(-15) + (-12) - (+8) + (-2) - (+4) + (-2)$;
- c)* $(+6) + (+4) - (-5) - (-3) + (+1) - (-8)$;
- d)* $(+6) + (-10) + (-4) - (-3) - (-7) + (-16)$.

30. Să se calculeze în două feluri, efectuând suma algebrică din paranteză și desfăcând paranteza, următoarele expresii:

- a)* $24 + (6 - 2 + 8 - 5)$; *b)* $18 - (5 - 9 - 3 + 8)$.

29. *a)* -7 ; *b)* -43 ; *c)* $+27$; *d)* -14 . **30.** *a)* $+31$; *b)* 17 .

31. Să se calculeze expresiile următoare, desfăcând parantezele:

a) $5 - 12 + (6 - 4 - 9) - (3 - 9 - 11)$;

b) $(-9 + 12 - 11 - 6) + (11 - 17 - 3) - (5 - 9)$;

c) $28 - (11 - 2) + (-7 + 5) - (-9 + 3) + (6 - 8)$.

Înmulțirea

32. Să se efectueze:

a) $(-8)(+2)$; b) $(+3)(-4)$; c) $(-5)(-2)$;

d) $(-9)(-3)$; e) $(+9)(-8)$; f) $(-7)(+6)$.

33. Să se efectueze:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)(-6)$; b) $\left(+\frac{3}{2}\right)(-4)$; c) $(-8)\left(-\frac{5}{6}\right)$;

d) $\left(+\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)$; e) $\left(-\frac{7}{8}\right)\left(-1\frac{5}{14}\right)$; f) $(-3,5)(-4)$.

34. Să se efectueze:

a) $(-2)(+3)(-4)$; b) $(+4)(-2)(-9)$;

c) $(+3)(-8)(+10)$; d) $(-3)(-5)(-7)$;

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)(+6)\left(-\frac{3}{8}\right)$; f) $(-2,5)(+2)(-3)$.

35. Cum se schimbă valoarea absolută a unui număr și cum se schimbă semnul lui dacă-l înmulțim cu $+1$? Dar dacă-l înmulțim cu -1 ?

31. a) $+3$; b) $+9$; c) $+21$.

36. Cu cât scade un număr pozitiv dacă-l înmulțim cu -1 ? Întrebare asemănătoare pentru cazul unui număr negativ.

37. Produsul a două numere este negativ.

a) Ce putem spune despre semnele acestor numere?

b) Aceeași întrebare, dacă produsul este pozitiv.

38. Produsul a trei numere este pozitiv. *a)* Ce putem spune despre semnele lor? *b)* Aceeași întrebare, dacă produsul este negativ.

39. Dacă a este pozitiv, ce semn are $-a$? Dar dacă a este negativ? Ce putem spune despre semnul produsului $a(-a)$?

Ridicarea la putere

40. Să se calculeze: $(-4)^2$; $(+5)^3$; $(-5)^3$; $(-\frac{1}{2})^2$; $(+\frac{1}{2})^3$; $(-\frac{1}{2})^3$; $(+0,1)^2$; $(-0,1)^3$; $(-1)^6$; $(-1)^{10}$.

Împărțirea

41. Să se calculeze:

- a)* $(+24):(-6)$; *b)* $(-18):(-3)$;
c) $(+15):(+3)$; *d)* $(-14):(+7)$;
e) $(-12):(-4)$; *f)* $(+8):(+2)$;
g) $(-36):(-12)$; *h)* $(+30):(-10)$;
i) $(-100):(-20)$.

36. Cu dublul lui. **38.** *a)* Unul dintre ele sau toate trei sînt pozitive; *b)* Unul dintre ele sau toate trei sînt negative.

42. Să se scrie cîturile următoare sub formă de fracție pozitivă sau negativă:

$$\frac{-3}{+5}; \frac{+5}{-7}; \frac{-4}{-9}; \frac{+6}{+13}; \frac{-8}{-3}; \frac{+7}{-2}; \frac{-17}{+5}.$$

43. Să se efectueze împărțirile următoare, punind rezultatul sub formă de fracție sau de număr mixt:

$$a) (-8):(-11); \quad b) (+11):(-4);$$

$$c) (-23):(+5); \quad d) (+6):(-7);$$

$$e) (-19):(-6); \quad f) (+27):(-8).$$

44. Care dintre fracțiile următoare este mai mare ca 1 și care este mai mică decît 1? Să se compare de fiecare dată și numărătorul cu numitorul.

$$\frac{3}{5}; \frac{2}{-7}; \frac{2}{-3}; \frac{5}{-4}; \frac{9}{-8}; \frac{1}{4}.$$

Mai este valabil ce s-a învățat la aritmetică: dacă numărătorul este mai mare ca numitorul, fracția este supraunitară ș.a.m.d. Care dintre aceste reguli rămîne valabilă?

45. Să se calculeze:

$$a) \left(-\frac{5}{8}\right): \left(+\frac{3}{4}\right); \quad d) \left(-\frac{3}{5}\right): \left(+4\frac{1}{2}\right);$$

$$b) \left(+\frac{6}{7}\right): \left(-\frac{3}{5}\right); \quad e) \left(+3\frac{1}{8}\right): \left(-4\frac{9}{10}\right);$$

$$c) \left(+\frac{3}{5}\right): \left(-\frac{6}{7}\right); \quad f) \left(-2\frac{7}{12}\right): \left(-5\frac{1}{6}\right).$$

$$45. a) \frac{5}{6}; \quad b) 1\frac{3}{7}; \quad c) -\frac{7}{10}; \quad d) \frac{2}{5}; \quad e) 2;$$

$$f) +\frac{1}{2}.$$

46. Ce schimbare suferă un număr dacă-l împărțim prin $(+1)$? Dar dacă-l împărțim prin (-1) ?

47. Cîtul a două numere este negativ. Ce se poate spune despre semnele acestor numere? Aceeași întrebare, pentru cazul cîtului pozitiv.

48. Să se calculeze:

a) $3(-2) + 2(-5) - 4(-1)$;

b) $(-6)(-3) + (+3)(-5) - (-1)(-2) - (-4)(+3)$;

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{2}{3}\right) - \left(+\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{9}\right) + \left(-\frac{5}{12}\right)\left(-1\frac{1}{5}\right)$.

49. Să se calculeze valoarea expresiei $3a - 2b$, pentru: a) $a = -4$, $b = +3$; b) $a = 1$, $b = 1$; c) $a = 0$, $b = -5$; d) $a = -6$, $b = +2$; e) $a = -1$, $b = -2$.

50. Să se calculeze valoarea expresiei $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y + 2z$, pentru: a) $x = 3$, $y = 7$, $z = 2$;

b) $x = -8$, $y = -4$, $z = -3$;

c) $x = -4$, $y = -2$, $z = -13$.

48. a) -12 ; b) $+13$; c) $\frac{1}{3}$.

49. a) 18 ; b) $+1$; c) $+10$; d) 22 ; e) $+1$.

50. a) $5\frac{7}{10}$; b) $+3\frac{1}{5}$; c) $24\frac{3}{5}$.

51. Să se calculeze valoarea expresiei $3m + 4n$ pentru: a) $m = -\frac{1}{3}$, $n = +\frac{1}{2}$; b) $m = \frac{5}{6}$, $n = \frac{3}{4}$; c) $m = -\frac{2}{9}$, $n = \frac{1}{6}$; d) $m = \frac{5}{12}$, $n = \frac{3}{8}$.

52. Să se calculeze valoarea expresiei $2a - 0,5b + 3x$ pentru:

- a) $a = -1,5$, $b = +4$, $x = -1$;
 b) $a = -3$, $b = +6$, $x = -1,8$;
 c) $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{5}$, $x = \frac{5}{6}$.

53. Să se calculeze:

- a) $(+6)^2 + (-3)^3 - (+2)^4 - 12$; b) $(-2)^3 - (+5)^2 + (-2)^4 - (-3)^3$; c) $(-1)^6 - (-2)^3 + 1(-3)^2 + (-2)^2$.

54. Să se calculeze: a) $3 \cdot (-2)^2$; b) $2(-3)^2$; c) $\left(-\frac{1}{4}\right)(-2)^3$; d) $(-0,5)^2(-4)$; e) $(+10)^2(-0,3)$.

Să se calculeze valoarea expresiilor:

55. $2x^3 - 5x^2$ pentru:

- a) $x = -3$; b) $x = +2$; c) $x = 10$.

51. a) $+3$; b) -5 ; c) $+1$; d) $\frac{1}{4}$. 52. a) -8 ;

b) $-14,4$; c) -4 ; d) $\frac{2}{15}$. 53. a) -19 ; b) $+10$; c) $+22$.

54. a) $+12$; b) -18 ; c) $+2$; d) -1 ; e) -30 .

55. a) -99 ; b) -4 ; c) -2500 .

56. $\frac{1}{2}a^2 - 3a + 4$ pentru:

a) $a = 2$; b) $a = +1$; c) $a = 10$.

57. $5x^2 - 3a^2 - 2x + 3a$ pentru:

a) $x = -1$, $a = 3$; b) $x = +2$, $a = 2$;
c) $x = -3$, $a = +4$.

58. $(2a - 5b)^2$ pentru: a) $a = 4$, $b = 1$;
b) $a = 3$, $b = 2$; c) $a = 0$, $b = 3$.

59. $(3x - 2y - z)^3$ pentru:

a) $x = 4$, $y = -3$, $z = 5$; b) $x = 6$,
 $y = 0$, $z = -5$.

60. Expresia a^2 poate lua valori negative?
Dar x^3 ?

61. Expresia $a^2 + b^2$ poate lua valori negative?

62. Să se calculeze:

a) $(+5) : (-2)^2$; b) $(-3)^2 : (-4)$;
c) $(-1)^3 : (+2)^2$

63. Să se efectueze:

a) $\frac{-3 + (-5)^2}{2 - 9}$; b) $\frac{(-6) - (-4)}{(+3)(-2) - (-2)^2}$; c) $\frac{(-3)^2 - (-2)^3}{21 - (+2)^2}$.

56. a) $+12$; b) $1\frac{1}{2}$; c) $+84$. 57. a) -29 ; b) -2 ;
c) $+15$. 58. a) $+169$; b) $+256$; c) $+225$. 59. a) -1 ;
b) $+12167$. 62. a) $+1\frac{1}{4}$; b) $-2\frac{1}{4}$; c) $-\frac{1}{4}$.
63. a) $-3\frac{1}{7}$; b) $+1$; c) $+1$.

Să se calculeze valorile expresiilor următoare:

64. $\frac{2a}{a+3}$ pentru: a) $a = 2$; b) $a = 5$; c) $a = 1$.

65. $\frac{x^2-8}{x^2+1}$ pentru: a) $x = 1$; b) $x = -2$; c) $x = 0$.

66. $\frac{5a^2}{2b} - \frac{3b^2}{5a}$ pentru: a) $a = 2$, $b = +4$;

b) $a = +2$, $b = 4$; c) $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{3}$.

67. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$ pentru: a) $x = +5$, $y = 1$;

b) $x = 1$, $y = +5$; c) $x = -\frac{1}{2}$, $y = +2$.

68. $\frac{a^2}{2x^2} - \frac{3a^2}{5ax}$ pentru: a) $a = -4$, $x = +6$;

b) $a = 5$, $x = 5$; c) $a = 2$, $x = \frac{1}{4}$.

69. Să se calculeze valorile expresiei $2x - 5$ pentru valorile lui x indicate în tabelul de mai jos și să se scrie rezultatele în rîndul al doilea, completînd tabelul.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x - 5$								

64. a) $-\frac{4}{5}$; b) $+\frac{5}{8}$; c) $+\frac{1}{2}$. 65. a) $-3\frac{1}{2}$; b) $-\frac{4}{5}$;

c) -8 . 66. a) $\frac{14}{9}$; b) $\frac{14}{9}$; c) $\frac{2}{25}$. 67. a) $1\frac{5}{26}$; b) $1\frac{5}{26}$;

c) $1\frac{4}{17}$. 68. a) -1 ; b) $2\frac{2}{3}$; c) $-4\frac{13}{24}$.

Cum variază valoarea numerică a acestei expresii cind x parcurge aceste valori?

70. Să se facă lucrarea analogă pentru expresia: $10 - 3x$, dînd literei x aceleași valori ca în tabelul precedent.

71. Lucrarea analogă pentru expresia: $x^2 - 4x - 5$, dînd lui x valorile: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

72. Ce semn pot avea expresiile: $\frac{a^2}{b^2}$; $\frac{a^2}{b}$; $\frac{a}{b^2}$?

Capitolul III

MONOAME ȘI POLINOAME

37. Calcul algebric. În cele ce urmează vom învăța cum se pot face calcule cu numere reprezentate prin litere, deci fără să știm ce număr reprezintă fiecare literă.

Fie, de exemplu, adunarea:

$$3a + 4a.$$

Nu știm dacă a reprezintă numărul 3 528, sau $-4\frac{1}{2}$, sau un alt număr oarecare. Știm însă că litera a din $3a$ reprezintă același număr ca litera a din $4a$. Aceasta ne ajunge ca să putem spune că:

$$3a + 4a = 7a.$$

În adevăr, dacă înmulțim un număr oarecare cu 3, apoi cu 4 și adunăm rezultatele, obținem același rezultat ca atunci când înmulțim numărul cu 7.

Dacă a este un număr pozitiv, îl putem privi ca măsura unei lungimi. Să presupunem că avem mai multe bucăți de pânză egale, fiecare din ele având a metri. Atunci 3 bucăți de pânză au $3a$ metri, 4 bucăți de pânză au $4a$ metri, iar $3 + 4 = 7$ bucăți de pânză au $7a$ metri.

38. Identitate. Să privim egalitatea:

$$3a + 4a = 7a.$$

Expresiile $3a + 4a$ și $7a$ au valori numerice egale oricare ar fi valoarea numerică a lui a . De exemplu, pentru $a = 10$, avem:

$$3a + 4a = 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 = 30 + 40 = 70;$$

$$7a = 7 \cdot 10 = 70;$$

pentru $a = -5$, avem:

$$3a + 4a = 3(-5) + 4(-5) = -15 - 20 = -35;$$

$$7(-5) = -35.$$

Se spune că $3a + 4a = 7a$ este o *identitate*.

O identitate arată că expresia din stînga sem-nului egal are aceeași valoare numerică cu cea din dreapta, *oricare* ar fi valorile literelor.

E x e m p l e.

$$8xy + 4xy = 12xy; \quad 5b - 2b = 3b.$$

În cele ce urmează vom face calcule mai com-plicate cu expresii algebrice. În locul unei expresii date (cum ar fi $3a + 4a$) se va obține o altă ex-presie ($7a$). Totdeauna expresia dată și rezultatul, legate prin semnul $=$, vor forma o identitate.

39. **Monoame.** 1) O expresie ca:

$$3a, -5ab, 2x^2, -\frac{2}{5}ax^2$$

se numește *monom*. Un monom este o expresie algebrică, care nu indică alte operații decît înmulțiri și ridicări la putere. Expresia: $2a + 3$, de exemplu, conține și o adunare, ea nu este un monom.

Un monom este format, de obicei, dintr-un factor numeric (constant), numit *coeficient*, și o parte *literală*. De exemplu, în cazul monomului $-\frac{2}{5}ax^2$, coeficientul este $-\frac{2}{5}$, iar partea lite-

rală este ax^2 . Coeficientul se scrie în față, iar dacă partea literală conține mai multe litere, ele se scriu în ordine alfabetică. De exemplu, în loc de x^33a se scrie $3ax^3$. Acest lucru este permis, pentru că înmulțirea este comutativă.

0) expresie formată dintr-o singură literă sau un singur număr este tot un monom. De exemplu: a , 3 , $-\frac{5}{6}$ sînt monoame.

2) Cînd monomul conține o singură literă (variabilă), exponentul acelei litere indică *gradul* monomului. De exemplu, $5x^3$ este de gradul 3;

$2x^4$ este de gradul 4. Cînd litera nu are exponent, se consideră că exponentul ei este 1, deci monomul este de gradul întâi. De exemplu, monoamele $5x$, $-2a$, $\frac{3}{5}y$ sînt de gradul întâi. Un monom format dintr-un singur număr, de exemplu 4 sau -1 , este de gradul zero.

3) Două monoame care au aceeași parte literală (aceleași litere avînd aceiași exponenți) se numesc monoame asemenea sau *termeni asemenea*. De exemplu, monoamele:

$$5a \text{ și } -3a \text{ sau } \frac{3}{8}x^2 \text{ și } 7x^2$$

sînt asemenea. Monoamele $2x$ și $3a$ nu sînt asemenea; nici monoamele $5x^2$ și $5x^3$ nu sînt asemenea.

40. **Reducerea termenilor asemenea.** 1) Știm că, dacă toți termenii unei sume conțin același factor, el poate fi scos ca factor comun (§ 25).

E x e m p l e.

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 3(4 + 7);$$

$$8 \cdot 6 + 8 \cdot (-5) + 8 \cdot 3 = 8(6 - 5 + 3).$$

2) Să considerăm expresia: $5x + 3x - 2x$.

Ea reprezintă suma monoamelor $+5x$, $+3x$ și $-2x$, adică o sumă de trei produse neefectuate. Toate conțin factorul x . Scoatem factorul comun și obținem:

$$x(5 + 3 - 2) = x \cdot 6 = 6x.$$

Deci:

$$5x + 3x - 2x = 6x.$$

Se spune că am redus termenii asemenea. La rezultatul $6x$ putem ajunge mai repede astfel: facem suma algebrică a coeficienților ($5 + 3 - 2 = 6$) și înmulțim cu factorul x .

E x e m p l e. $2a^2 - 7a^2 + 3a^2 = -2a^2$;

$$-\frac{3}{5}y + 2y = \frac{7}{5}y.$$

Pentru a reduce doi sau mai mulți termeni asemenea, facem suma algebrică a coeficienților și o înmulțim cu partea literală.

Două monoame opuse, cum ar fi:

$$+3a \text{ și } -3a; -5x^2 \text{ și } +5x^2$$

reprezintă două numere opuse, deci suma lor este zero. Când, într-o sumă, apar două monoame opuse le putem tăia. Se spune că ele se reduc.

3) Considerăm expresia:

$$3x + x.$$

Ea reprezintă suma monoamelor $3x$ și x , care sînt asemenea. La prima vedere nu putem aplica regula, căci monomul x n-are coeficient. Dar știm

ca dacă înmulțim 1 cu un număr oarecare obținem tot acel număr:

$$1 \cdot 5 = 5; 1 \cdot 6 = 6; 1 \cdot (-3) = -3.$$

Atunci înlocuim x prin $1x$ și obținem:

$$3x + 4 = 3x + 1x + 4 = 4x.$$

Cînd un monom nu are coeficient, considerăm că are coeficientul 1.

4) Să considerăm expresia:

$$2a - 5b.$$

El reprezintă suma monoamelor $2a$ și $-5b$ care nu sînt omogene. Această adunare se poate efectua la cîtă vreme nu cunoaștem valorile numerice ale literelor a și b .

41. Polinoame. 1) Expresii ca:

$$5a - 2x - 4y; x^2 - 4x + 3;$$
$$\frac{1}{2}ab^2 + 2a^3 - 5b^3$$

se numesc *polinoame*. Un polinom este o sumă algebrică de două sau mai multe monoame. Aceste monoame se numesc *termeni* polinomului. De exemplu, termenii primului dintre polinoamele de mai sus sînt: $5a$, $2x$ și $-4y$. Un polinom format din doi termeni se numește *binom* (de exemplu: $2x - y$), iar un polinom format din trei termeni (de exemplu: $2x^2 - 3x + 5$) se numește *trinom*.

2) Considerăm polinomul

$$5x - 4x^2 - 3 + 2x^4 - 7.$$

El este format din cinci monoame, ale caror grade sînt respectiv: 1, 2, 0, 4, 3. Cel mai mare dintre aceste grade este 4; se spune că acest polinom este de gradul 4. Termenul care nu conține

(în acest exemplu, termenul -3) se numește *termen liber*.

6) *termenul* $7x^2$ este gradul în zecimal sau în zecimile lui x .

7) *termenul* $7x^2$ este termenul de grad al doilea sau ordinea termenilor. Polinomul este și el o sumă, deci putem schimba după voie ordinea termenilor săi. De obicei, termenii se scriu în ordinea crescătoare, sau în ordinea descrescătoare a gradelor. De exemplu, polinomul de mai sus se poate scrie:

$$-2x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x + 3$$

și se spune că polinomul *este ordonat după puterile descrescătoare ale lui x* . Acesta polinom se mai poate scrie:

$$3 + 5x - 4x^2 + x^3 - 2x^4.$$

Acum polinomul *este ordonat după puterile crescătoare ale lui x* .

42. Adunarea și scăderea polinoamelor. Să considerăm expresia:

$$(2a - 4b - 3c) - (-3a + b - 5c) - (a - 2b - c).$$

Ea este formată din trei polinoame. Se cere să adunăm primul polinom cu al doilea, iar din suma lor să scădem pe cel de al treilea.

Polinomul fiind o sumă algebrică, putem aplica regula cu privire la adunarea și scăderea unei sume.

Desfacem parantezele. Paranteza care cuprinde primul polinom este de plus, în fața parantezei a doua avem semnul $-$, deci luăm la o parte semnul $+$ și paranteza și luăm termenii din paranteză cu semnele lor; în fața parantezei a treia avem semnul $-$, deci la un la o parte semnul $-$.

o paranteză și luăm termenii din paranteză cu semnele schimbate. Obținem:

$$2a - 4b - 3c - 3a + b - 5c = a + 2b - c.$$

Reducem termenii asemenea: $2a - 3a = a$; $-4b + b = -3b$; $-3c - 5c = -8c$ și obținem rezultatul:

$$-2a - b - 9c.$$

E x e m p l u.

$$\begin{aligned} 5x - (x^2 - 3x + 2) + (-3x^2 + 5) - (2x - 4) &= \\ 5x - x^2 + 3x - 2 - 3x^2 + 5 - 2x + 4 &= \\ = -4x^2 + 6x + 7. \end{aligned}$$

La reducerea termenilor asemenea, am luat întâi termenii în x^2 , apoi termenii în x și la urmă termenii liberi, ca rezultatul să iasă ordonat după puterile descrescătoare ale lui x .

43. Proba prin substituție. Expresia dată și rezultatul trebuie să aibă valori numerice egale pentru orice valoare a lui x . Să facem proba în exemplul precedent, luând, de exemplu, $x = 4$. Notînd expresia dată cu E (enunțul), avem:

$$E = 5 \cdot 4 - (4^2 - 3 \cdot 4 + 2) + (-3 \cdot 4^2 + 5) - (2 \cdot 4 - 4).$$

După efectuarea tuturor calculelor, se obține -33 .

Înlocuim și în rezultat (pe care l-am notat cu R) pe x cu 4. Obținem:

$$R = -4 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 + 7 = -33.$$

Expresia dată și rezultatul au aceeași valoare numerică: proba a ieșit.

Această probă se numește *proba prin substituție*. Cu ajutorul ei se poate controla orice calcul algebric. *

Cînd proba nu iese, lucrarea este greșită; cînd proba iese, s-ar putea întîmpla ca lucrarea să fie totuși greșită. De exemplu, dacă greșeam lucrarea și obțineam rezultatul (greșit) $-4x^2 + 5x + 11$, înlocuind x prin 4, obținem tot -33 . Dar acest lucru se întîmplă rar.

44. **Înmulțirea monoamelor.** 1) Fie de înmulțit două puteri ale aceleiași baze, de exemplu:

$$a^3 \cdot a^2.$$

Fiecare factor reprezintă un produs: $a^3 = aaa$, $a^2 = aa$. Înmulțirea fiind asociativă, putem înlocui fiecare factor prin produsul respectiv. Obținem: $a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, format din $3 + 2 = 5$ factori egali cu a , care este egal cu a^5 , deci:

$$a^3 \cdot a^2 = a^5.$$

Pentru a înmulți două puteri ale aceleiași baze, lăsăm baza neschimbată și adunăm exponenții.

Această regulă se exprimă prin formula:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

E x e m p l e: $b^1 \cdot b^2 = b^3$; $x^2 \cdot x^3 = x^5$;
 $a^2 \cdot a^3 \cdot a^1 = a^6$.

2) În cazul înmulțirii:

$$a^5 \cdot a,$$

de exemplu, se pare că nu putem aduna exponenții, căci al doilea factor nu are exponent. Dar această expresie reprezintă un produs de $5 + 1 = 6$ factori egali cu a , deci $a^5 \cdot a = a^6$. Pentru ca regula de înmulțire a puterilor să fie valabilă și în acest caz, se considera ca factorul a are exponentul 1

$$a = a^1.$$

Cînd un număr nu are nici un exponent, considerăm ca el are exponentul 1.

În felul acesta, orice literă sau orice număr poate fi privit ca o putere.

Exemple: $m^3 \cdot m = m^{3+1} = m^4$;

$$x^4 \cdot x \cdot x^2 = x^{4+1+2} = x^7.$$

Cînd puterile au baze diferite, ele nu pot fi înmulțite. De exemplu, a^2b^3 nu se poate scrie sub o formă mai simplă.

3) Fie acum de efectuat înmulțirea:

$$(-3a^2x)(+5ax^3y^2).$$

Înmulțirea este asociativă, adică a puterilor înlocuim fiecare din cele două produse prin factorii lor, obținem:

$$-3a^2x(+5)ax^3y^2.$$

Înmulțirea este comutativă, adică putem schimba după voie ordinea factorilor. O schimbăm astfel încît coeficienții să vină unul lînga altul, de asemenea și puterile aceluiași baze. Luăm literele în ordine alfabetică și obținem:

$$(-3)(+5)a^2axx^3y^2.$$

Acum înlocuim factorii, care se pot înmulți, prin produsele lor: $(-3)(+5) = -15$; $a^2a = a^3$; $xx^3 = x^4$; y^2 rămîne neschimbat.

$$\text{Deci: } (-3a^2x)(+5ax^3y^2) = -15a^3x^4y^2.$$

În practică, rezultatul se scrie de-a dreptul.

Pentru a înmulți două monomee, înmulțim coeficienții între ei și puterile aceluiași baze între ele și înmulțim rezultatele. Cînd o literă figurează numai într-un singur monom, o copiem ca factor.

Exemple: $a) (a^2)^3 \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{7}ab^2 \right)$

zis: $2\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{4}$; rămâne a ;
 $b^2 \cdot b^3 = b^5$.

$b) ma^2 (3xy^2 + \frac{2}{3}y^3) = 6mx^2y^3 + \frac{2}{3}mxy^3$.

Am zis: $5(-3)\left(\frac{2}{3}\right) = -6$; m rămâne m ;

$x^2 \cdot x = x^3$; $y^2 \cdot y = y^3$; z^2 rămâne z^2 .

45. Înmulțirea unui polinom cu un monom.

1) Din aritmetica se știe că, pentru a înmulți o sumă cu un număr, se poate proceda ca în exemplele următoare:

$$(5 + 8 + 4) \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = \\ = 15 + 24 + 12 = 51;$$

$$(12 + 7 + 3) \cdot 10 = 120 + 70 + 30 = 220.$$

Înmulțirea este *distributivă* față de adunare. Dacă reprezentăm numerele prin dale, avem:

$$(a + b + c)m = am + bm + cm.$$

Pentru cazul când a, b, c și m reprezintă numere naturale, acest rezultat se poate deduce din figura 12. În fiecare rând sînt $a + b + c$ puncte și avem m rânduri. În total, avem

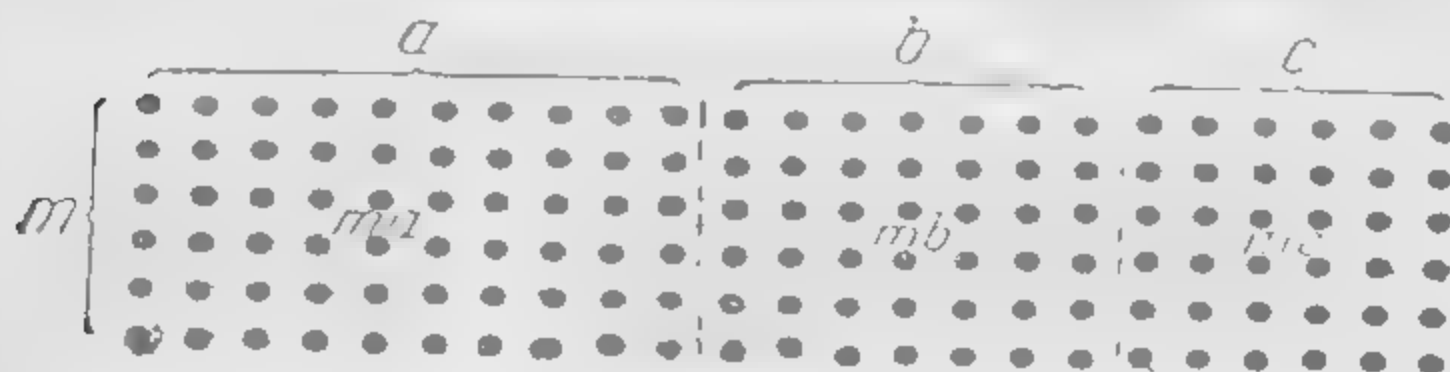


Fig. 12

$(a + b + c)m$ puncte. În prima de partitură sînt am puncte, în a doua sînt bm puncte, iar în a treia cm puncte, deci în total: $am + bm + cm$ puncte.

La fel se procedează cînd în paranteză se găsește o sumă algebrică, iar m reprezintă un număr rațional oarecare, pozitiv sau negativ (§ 25).

2) Fie acum de înmulțit un polinom cu un monom:

$$(3a - 5b + 6c)(-2a).$$

Expresia din prima paranteză reprezintă o sumă algebrică ($3a$, $-5b$ și $6c$ reprezintă aceste numere), iar $-2a$ reprezintă de asemenea un număr, deci avem de înmulțit o sumă cu un număr: vom înmulți fiecare termen al sumei cu numărul.

Zicem:

$$\begin{aligned} (3a)(-2a) &= -6a^2; \quad (-5b)(-2a) = +10ab; \\ (+6c)(-2a) &= -12ac. \end{aligned}$$

Rezultatul este:

$$-6a^2 + 10ab - 12ac.$$

În practică, rezultatul se scrie așa dreptul.

Pentru a înmulți un polinom cu un monom, înmulțim toți termenii polinomului cu monomul și facem suma algebrică a rezultatelor.

E x e m p l e:

$$\begin{aligned} a) (-3x^2 + 2x + 5)(-4x) &= 12x^3 - 8x^2 + 20x, \\ b) (5a - 2x + 4)(2a) &= 10a^2 + 4ax^2 - 8ax. \end{aligned}$$

16. Înmulțirea polinoamelor. 1) Fie de exemplu înmulțirea

$$(3 + 5x + 9x^2)(7 - 4x).$$

Dacă privim prima paranteză ca un singur număr ($3 + 5 + 9 = 17$), avem de înmulțit un număr cu o sumă. Vom înmulți numărul cu fiecare termen al sumei; obținem:

$$(3 + 5 + 9) \cdot 7 + (3 + 5 + 9) \cdot 4.$$

Procedam la fel cu fiecare parte și obținem

$$3 \cdot 7 + 5 \cdot 7 + 9 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 9 \cdot 4.$$

Această expresie se poate obține direct, astfel: înmulțim numerele 3, 5 și 9 cu 7, apoi cu 4 și adunăm rezultatele. Dacă reprezentăm numerele prin litere, avem:

$$(a + b + c)(m + n) = am + bm + cm + an + bn + cn.$$

Pentru a înmulți două sume algebrice, înmulțim fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al sumei a doua și adunăm rezultatele.

În cazul numerelor naturale, a căror valoare se poate deduce din figura 1, putem înlocui $(a + b + c)$ puncte și $(m + n)$ rânduri, deci, în total:

$$(a + b + c)(m + n) \text{ puncte.}$$

În casașă de jos, din stînga, sînt m rînduri de câte a puncte, în casașă din dreapta ei sînt bm puncte ș.a.m.d.

2) Regula de mai sus se bazează pe faptul că înmulțirea este distributivă față de adunare. Cum

acest lucru este valabil și în cazul numerelor raționale oarecare, pozitive sau negative, rezultă că regula rămîne valabilă și în cazul sumelor algebrice. La înmulțirea termenilor trebuie să ținem



Fig. 13

cazina de regula semnelor. Vom verifica acest lucru pe un exemplu:

$$\begin{array}{r} (8 - 5 + 4)(2 - 6) = 8 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 + \\ + 5 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 16 - 10 + 8 - 48 + 30 - 24 = -28. \end{array}$$

Dacă efectuăm mai întâi sumele, obținem:
 $8 - 5 + 4 = 7$; $2 - 6 = -4$; $7 \cdot (-4) = -28$,
 adică același rezultat.

3) Fie acum de înmulțit două polinoame, de exemplu:

$$(3m - 2n - 5p)(4n - 3p).$$

Expresile $3m$, $2n$ ș.a.m.d. reprezintă niște numere, deci putem proceda după regula de mai sus. Zicem:

$$3m \cdot 4n = 12mn, (-2n) \cdot 4n = -8n^2 \text{ ș.a.m.d.}$$

$$\text{Obținem: } 12mn - 8n^2 + 20np - 9mp + 6np + 15p^2.$$

Reducând termenii asemenea, obținem:

$$12mn - 8n^2 + 14np - 9mp + 15p^2.$$

Pentru a înmulți două polinoame, înmulțim fiecare termen al primului polinom cu fiecare termen al polinomului al doilea și facem suma algebrică a rezultatelor.

4) Cînd polinoamele sînt ordonate, lucrările se așază ca în exemplul de mai jos:

$$\begin{array}{r} (3x^2 - 7x + 4)(x^2 + 3x - 5) \\ 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 \\ + 9x^3 - 21x^2 + 12x \\ - 15x^2 + 35x - 20 \\ \hline 3x^4 - 2x^3 - 52x^2 + 47x - 20. \end{array}$$

Am înmulțit toți termenii primului polinom cu x^2 și am scris rezultatul în rîndul întâi de sub

linie; apoi am înmulțit toți termenii primului polinom cu $3x$ și am scris rezultatul în rîndul al doilea, avînd grijă ca termenii asemenea să fie așezați unul sub altul; în sfîrșit, am procedat în mod analog cu -5 . Am redus termenii asemenea și am scris rezultatul sub linie.

47. Aplicații. 1) Cînd sînt de efectuat multe operații cu monoame și polinoame, se respectă regula cu privire la ordinea operațiilor stabilită pentru numere, căci monoamele și polinoamele reprezintă tot numere.

Fie, de exemplu, de calculat:

$$3(4a - 2b) - 5(-2a + 1) - 4(a - 2b) - 3(4a + b)$$

Efectuăm înmulțirile scriind rezultatele una după altul*:

$$6a - 4b + 10a - 5 - 4a + 8b - 12a + 3b.$$

Reducem termenii asemenea și obținem rezultatul: $8a - 11b - 5$.

48. Ridicarea unui monom la o putere. 1. Fie de calculat:

$$(a^2)^3.$$

Trebuie să efectuăm înmulțirea $a^2 a^2 a^2$, care da $a^{2+2+2} = a^6$. Numarul 6 a apărut ca suma a 3 termeni egali cu 2, adică $2 \cdot 3$. Numarul 2 este primul exponent, 3 este al doilea exponent, iar 6 este produsul lor.

Pentru a ridica o putere la o alta putere, lasăm baza neschimbată și înmulțim exponentul între ei

* Mai: $3(4a - 2b) = 12a - 6b$, $5(-2a + 1) = -10a + 5$, $4(a - 2b) = 4a - 8b$, $3(4a + b) = 12a + 3b$.
 $- 5(-2a + 1)$, $4(a - 2b)$, $3(4a + b)$, care se scriu în rîndurile următoare:
 $6a - 4b + 10a - 5 - 4a + 8b - 12a + 3b$.
 În text s-a cerut de a dreptul suma a 3 a acei lor expresii.

Această regulă se exprimă prin formula:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Exemple: $(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$; $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$.

2) Fie de calculat:

$$(-2a^2b)^3.$$

Trebuie să înmulțim între ei trei factori egali cu $-2a^2b$. Avem:

$$(-2a^2b)(-2a^2b)(-2a^2b) = (-2)(-2)(-2) \cdot a^2a^2a^2b b b = (-2)^3(a^2)^3b^3 = -8a^6b^3.$$

-8 este puterea a treia a lui (-2) ; a^6 este puterea a treia a lui a^2 ; iar b^3 este puterea a treia a lui b . Deci:

Pentru a ridica un monom la o putere, ridicăm fiecare factor la aceea putere și înmulțim rezultatele.

Exemple.

$$(-3x^2)^3 = (-3)^3(x^2)^3 = -27x^6.$$

Calcul prescurtat

49. Unele calcule algebrice se fac pe baza unor formule speciale, care ne dau posibilitatea să scriem rezultatul de-a dreptul. În paragrafele care urmează dam câteva dintre aceste formule.

50. **Produsul sumei cu diferența.** Considerăm înmulțirea:

$$(a + b)(a - b),$$

unde primul binom reprezintă suma a doi termeni, a și b , iar binomul al doilea reprezintă diferența aceluiași termeni. Dacă efectuăm înmulțirea, obținem:

$$a^2 + ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Avem deci identitatea (formulă)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

În practică, această formulă se aplică astfel:
Fie de calculat:

$$(x + 3)(x - 3).$$

În locul lui a avem x , iar în locul lui b avem 3.
Ca rezultat, în locul lui a^2 punem x^2 , iar în locul lui b^2 punem $3^2 = 9$. Deci:

$$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9.$$

51. Aplicații. 1) În locul literelor a și b pot fi expresii algebrice mai complicate. De exemplu

$$(3x + 5y)(3x - 5y).$$

În locul lui a avem $3x$, iar în locul lui b avem $5y$. Rezultatul se obține astfel: în locul lui a^2 se pune $(3x)^2$ adică $9x^2$, iar în locul lui b^2 se pune $(5y)^2$ adică $25y^2$. Deci:

$$(3x + 5y)(3x - 5y) = 9x^2 - 25y^2.$$

În practică, rezultatul se scrie de-a dreptul

2) Fie de făcut înmulțirea $31 \cdot 29$

$$31 = 30 + 1, \text{ iar } 29 = 30 - 1, \text{ deci}$$

$$31 \cdot 29 = (30 + 1)(30 - 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899.$$

Acest calcul se poate face în gînd.

3) Formula $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ poate fi citită de la dreapta spre stînga:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Sub forma aceasta, ea ne arata cum se poate transforma o diferență de pătrate într-un produs. Fie, de exemplu, expresia:

$$25a^2 - 16b^2;$$

$25a^2$ este pătratul lui $5a$, iar $16b^2$ este pătratul lui $4b$. Deci:

$$25a^2 - 16b^2 = (5a + 4b)(5a - 4b).$$

52. Pătratul binomului¹. Avem:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

$$\text{Deci: } \left\{ \begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned} \right.$$

Această identitate ne arata cum se ridică la patrat o suma de doi termeni. Fie, de exemplu, de calculat:

$$(5m + 3x)^2.$$

În locul lui a avem $5m$, iar în locul lui b avem $3x$. În locul lui a^2 punem $(5m)^2$, adică $25m^2$, în locul lui $2ab$ punem $2 \cdot 5m \cdot 3x = 30mx$, iar în locul lui b^2 punem $(3x)^2$ adică $9x^2$. Deci:

$$(5m + 3x)^2 = 25m^2 + 30mx + 9x^2.$$

În practică, rezultatul se scrie de-a dreptul

53. Aplicații. 1) Un număr de două cifre poate fi privit ca un binom. De exemplu, $74 = 70 + 4$; $23 = 20 + 3$.

¹ Aci cuvîntul *binom* se folosește într-un sens mai larg, ca suma sau diferență de doi termeni.

la 2 la puterea care e rid. 4 un binom la puterea 2 ne permite să scriem din 4 pătrățele un număr de două cifre.

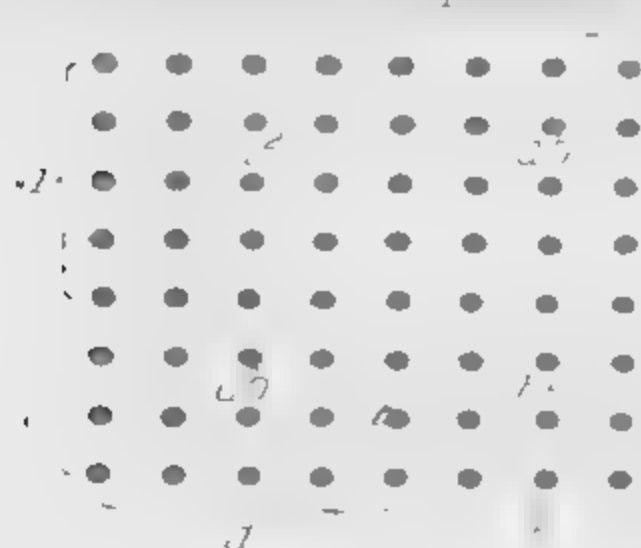


Fig. 14

Fie, de exemplu, de calculat 37^2 , care este $(7+30)^2$.

Avem: $7^2 = 49$; $2 \cdot 7 \cdot 30 = 420$; $30^2 = 900$;

$$49 + 420 + 900 = 1\,369.$$

În practică, procedăm astfel: 7^2 face 49... scriem 9 și ținem 4; $2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$... și cu 4 (pe care-l ținem) face 46... scriem 6 (la stînga lui 9) și ținem 4; $3^2 = 9$... și cu 4 (pe care-l ținem) face 13... scriem 13 (la stînga lui 6). Astfel apare direct rezultatul 1 369.

Figura 14 ne arată de fapt a formării pătratului $(a+b)^2$ cînd a și b sînt numere naturale.

2) Avem:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - a^b - a^b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Deci:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Această identitate ne arată cum se ridică o diferență la pătrat. Se procedează ca în cazul sumei, numai că termenul mijlociu are semnul $-$.

Exemplu.

$$(2x-5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2.$$

4. *Trădătoarea* $(a/b)^2 = a^2/b^2$ este, pentru $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, o fracție subunitară, adică puterea obținem un rezultat mai mic decât acea fracție.

Exemple:

$$0,2^2 = 0,04 < 0,1; \quad 0,2^3 = 0,008 < 0,1$$

$$0,1^4 = 0,0001 < 0,1.$$

1) Pornim de la formula:

$$(1+a)(1-a) = 1-a^2.$$

Dacă împărțim produsul la unul din factori, obținem celalalt factor:

$$\frac{1-a^2}{1+a} = 1-a; \quad \frac{1-a^2}{1-a} = 1+a.$$

Dacă a este un număr pozitiv mic în comparație cu 1, $1-a^2$ este și mai mic decât un lacuș o greșală care mare dacă neglijăm (lăsăm la o parte) termenul a^2 . Obținem astfel egalitățile aproximative*

$$\frac{1}{1+a} \approx 1-a; \quad \frac{1}{1-a} \approx 1+a.$$

Exemple.

$$\frac{1}{1,003} \approx 0,997; \quad \frac{1}{0,9992} \approx 1,0008$$

În primul exemplu $a = 0,003$ și în al doilea, $a = 0,0008$.

2) Avem:

$$(1+a)^2 = 1+2a+a^2; \quad (1-a)^2 = 1-2a+a^2.$$

Dacă a este un număr pozitiv mic în comparație cu 1, putem neglija termenul a^2 . Obținem astfel egalitățile aproximative:

$$(1+a)^2 \approx 1+2a; \quad (1-a)^2 \approx 1-2a.$$

* Se poate să scriem aceste "egalități" în forma "avem 1 cm..."

Exemple: $1,004^2 = 1,008$; $0,9997^2 \approx 0,9994$.

În primul exemplu, $a = 0,004$; în exemplul al doilea $a = 0,0003$.

Rezultatele exacte sînt: $1,004^2 = 1,008016$; $0,9997^2 = 0,99940009$.

5. Împărțirea monoamelor. 1) Fie de făcut împărțirea:

$$a^6 : a^2$$

Trebune să găsim o putere a lui a care, înmulțită cu a^2 , să dea a^6 . Dar la înmulțire exponenții se adună. Trebuie deci să găsim un exponent, care, adunat cu 2, să dea 6. Acest exponent este $6 - 2 = 4$. Rezultă că:

$$a^6 : a^2 = a^{6-2} = a^4.$$

Pentru a împărți o putere printr-o altă putere, care are aceeași bază, lasăm baza neschimbată și scădem exponentul împărțitorului din exponentul deîmpărțitului.

Accasta regulă se exprimă prin formula:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Exemple: $b^3 : b^2 = b^2$; $x^7 : x^3 = x^4$.

În cazul unei împărțiri ca $x^3 : x$, în care împărțitorul nu are exponent, se consideră că are exponentul 1. Deci $x^3 : x = x^2$ (am scăzut 1 din 3).

Formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are înțeles numai cînd $m > n$. În cazul

$$a^3 : a^3,$$

de exemplu, unde exponenții sînt egali, ar apărea exponentul $3 - 3 = 0$. Dar nu avem nevoie de

regulă. Deîmpărțitul fiind egal cu împărțitorul, cîțul este 1; deci $a^3 : a^3 = 1$.

2) Fie acum de făcut împărțirea:

$$-10a^3b^2c : 5ab^*.$$

Trebuie să găsim un monom care, înmulțit cu $5ab$, să dea $-10a^3b^2c$. Îl găsim astfel: $(-10) : (-5) = 2$; $a^3 : a = a^2$; $b^2 : b = b$; c rămîne c . Deci:

$$(-10a^3b^2c) : (-5ab) = 2a^2bc.$$

E x e m p l e. a) $(-3x^2y^2) : (-4x) = \frac{3}{4}xy^2.$

Am zis: $(-3) : (-4) = \frac{3}{4}$; $x^2 : x = x$; y^2 rămîne y^2 .

b) $5a^2bc^3 : 6abc^3 = \frac{5}{6}a.$

Am zis: $5 : 6 = \frac{5}{6}$; $a^2 : a = a$; $b : b = 1$; $c^3 : c^3 = 1$.

Factorii egali cu 1 nu se scriu.

3) Fie de făcut împărțirea:

$$10a^2 : 2ab.$$

* În unele cărți de aritmetică se spune că, dacă într-o expresie sînt indicate mai multe operații de același ordin, ele se fac în ordinea în care sînt scrise. Ar însemna să împărțim deîmpărțitul prin 5, iar rezultatul să îl înmulțim cu a , apoi cu b . Expresia noastră arată însă altceva, și anume că monomul $-10a^3b^2c$ trebuie împărțit prin monomul $5ab$. Regula despre ordinea operatorilor ar cere să se scrie $(-10a^3b^2c) : (5ab)$, pentru a arăta că deîmpărțitul se împarte prin tot produsul. Totuși, nu se pun paranteze. În cazul expresiei $(-10a^3b^2c) : (-5ab)$, paranteza este necesară pentru a despărți semnul + de semnul - care urmează.

Orice termen din înmulțiri $(+ 2a^2)$ vom obține un produs care va conține factorul a , deci nu vom obține $10a^2$ (care nu conține factorul b). Această împărțire* nu se poate face.

• Impărțirea unui polinom printr-un monom. Fie împărțirea:

$$(8a^2 - 6ab + 3ac) : (-2a).$$

Expresia din prima paranteză este o sumă algebrică, iar expresia din paranteza a doua este un număr. Deci aplicăm regula după care se împarte o sumă printr-un număr (v. § 28). Zicem:

$$\begin{aligned} 8a^2 : (-2a) &= -4a, \quad -6ab : (-2a) = 3b; \\ +3ac : (-2a) &= -\frac{3}{2}c. \end{aligned}$$

Rezultatul este:

$$-4a + 3b - \frac{3}{2}c.$$

În practică, rezultatul se scrie de-a dreptul.

Pentru a împărți un polinom printr-un monom împărțim fiecare termen al polinomului prin acel monom și facem suma algebrică a rezultatelor.

Când măcar unul din termeni polinomului nu se poate împărți prin împărțitor, împărțirea nu se poate face.

E x e m p l e:

$$a) (5x^4 - 12x^3 + 18x^2) : 3x^2 = \frac{5}{3}x^2 - 4x + 6,$$

$$b) (-14ax^2 + 6a^2x + 10aa) : (-2aa) = 7x - 3a + 5.$$

7 Factor comun. Considerăm expresia

$$ab + ac.$$

* Este vorba de împărțirea întreagă.

Ambii termeni conțin factorul a . Se spune că a este un *factor comun*. Aceasta expresie este egală cu:

$$a(b + c),$$

caci, dacă efectuăm înmulțirea, obținem expresia dată.

Se spune că *am scos factorul comun a* , sau *am scos factorul a în fața parantezei*. După ce am scris a în fața parantezei, am împărțit expresia dată prin a și am scris citul în paranteză.

Pentru a scoate un factor comun dintr-o sumă algebrică, acel factor se scrie în fața parantezei, iar în paranteză se scrie citul împărțirii expresiei date prin factorul comun.

Exemple. a) Considerăm expresia:

$$6x^3 - 8x^2.$$

Ambii coeficienți sînt divizibili prin 2, iar părțile literale din ambii termeni sînt divizibile cu x^2 . Luăm ca factor comun $2x^2$ și obținem:

$$6x^3 - 8x^2 = 2x^2(3x - 4).$$

Pentru a obține expresia din paranteză, zicem:

$$6x^3 : 2x^2 = 3x; \quad 8x^2 : 2x^2 = -4;$$

$$b) 6ab^2 - 12a^2b - 15a^2b^2 = 3ab(2b - 4a - 5ab)$$

$$c) ax + a = a(x + 1).$$

58. Cel mai mic multiplu comun. Luăm, de exemplu, numerele 90, 84 și 150. Descompuse în factori primi, ele sînt:

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5;$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7;$$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Pentru a afla c.m.m.m.c., se iau toți factorii primi câte o singură dată, cu exponentul cel mai mare, deci:

$$\text{c.m.m.m.c.} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6\,300.$$

Pentru a afla c.m.m.m.c. a două sau mai multe expresii algebrice, le descompunem în factori, apoi aplicăm aceeași regulă ca în aritmetică.

Exemple.

a) Fie monoamele $8a^2$, $6ab$, $12ab^2$. Avem:

$$8a^2 = 2^3 a^2$$

$$6ab = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b$$

$$12ab^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2$$

$$\text{c.m.m.m.c.} = 2^3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b^2 = 24a^2b^2.$$

b) Să cautăm c.m.m.m.c. al binomelor: $3a - 3b$, $6a - 6b$, $ab - b^2$. Scoatem din fiecare binom factorul comun:

$$3a - 3b = 3(a - b)$$

$$6a - 6b = 6(a - b)$$

$$ab - b^2 = b(a - b)$$

$$\text{c.m.m.m.c.} = 6b(a - b).$$

EXERCITII

Monoame

1. Să se efectueze următoarele adunări și scăderi de monoame:

$$a) 5x + 3x; \quad b) 4a - 2a; \quad c) 5b - 3b;$$

$$d) -3a^2 + a^2; \quad e) 5ab - ab; \quad f) 8m - 7m;$$

$$g) 6x - 8x; \quad h) 4p - 3p; \quad i) -a^2 + 4a^2.$$

2. Să se calculeze:

a) $6b - 2b - 5b + 8b$;

b) $-4x^2 + 9x^2 - 3x^2 + x^2$;

c) $7ay - 10ay - 2ay + 3ay$;

d) $-2mn + 4mn - 3mn - mn$;

e) $-ax + 5ax - 6ax + 2ax$;

f) $4x^2 + 2x^2 - 7x^2 + 3x^2$.

3. Capacitatea unei găleți este de c litri. Un butoi conține 15 găleți de apă. Se adaugă 4 găleți, apoi se scot 7 găleți, se adaugă 3 găleți și se scot 14 găleți. Câți litri de apă au fost în butoi, câți litri s-au adăugat sau scos de fiecare dată și câți litri de apă au rămas în butoi?

4. O gospodărie agricolă colectivă cultiva grâu pe trei tarlale: una de 80 ha, a doua de 125 ha și a treia de 130 ha. Producția medie la hectar este de p kg. Cite kilograme de grâu produce fiecare tarla? Cât produce întreaga suprafață cultivată?

5. Într-un metru cub de zidărie intră x cărămizi. La o construcție s-au făcut trei pereți de $18,5 \text{ m}^3$, $7,3 \text{ m}^3$ și $8,6 \text{ m}^3$. Cite cărămizi au intrat în fiecare perete? Cite cărămizi au intrat în total?

6. O ladă de zahăr conține a kg, iar 1 kg de zahăr costă z lei. La un magazin s-au adus 8 lăzi de zahăr, apoi 5 lăzi și pe urmă 7 lăzi și din ele s-au vândut 12 lăzi. Să se afle cât valorează fiecare transport, cât valorează zahărul vândut și cât valorează zahărul rămas.

7. Un camion transportă a saci de ciment, iar un sac de ciment are c kg. Pe un șantier de locuințe muncitorești s-au descărcat luni 5 camio-

oane, mai 7 camioane, și încă 6 camioane și
 și 10 camioane. Căți saci de ciment s-au desca-
 rat în fiecare zi? Căți saci în total? Câte kilograme
 de ciment au fost necesare pentru a se zădărnici în total?

Polinoame

8. Să se ordoneze polinoamele următoare de la
 puterile descrescătoare ale lui x :

a) $-6x + 2x^3 + x^2 - 5x^4 + 4$;

b) $4x^2 - 12 + 6x + x^3 - 2x^5$.

9. Să se ordoneze polinoamele următoare după
 puterile crescătoare ale lui x :

a) $-18 - 5x^4 + 3x^2 + 8x - 2x^3$;

b) $3x + 8x^2 + 2x^3 + 4x^2 - x^4$.

10. Să se reducă termenii asemenea din pol-
 noamele următoare:

a) $2x + 6 + 3y + 10 - 5x - 4y + 1$;

b) $8m + 3n + 5p + 4p + 7n + 10m + 3n + 8m + p$;

c) $2y^2 + 6y + 3 + 8 + 5y^2 + 4y + 2y + y^2 + 2y^2 + 7$.

11. Să se efectueze următoarele adunări și
 scăderi de polinoame:

a) $(x + 2) + (3x + 1) + (2 - 4x) + (x + 5)$;

b) $(3x + 2y) + (x + 2y) + (2x - y)$;

c) $(a^2 + 3a + 2) + (-2a^2 + a + 1) + (-4a + a^2 + 3)$;

d) $(2xy + 5) + (x + 3 + 4xy) + (-xy - x + 2)$
 $- (-2xy + x)$.

11. a) $9x$; b) $2x + y$; c) $-2a^2 + 2a + 6$;
 d) $7xy - 3x - 6$.

12. Se dau polinoamele:

$$A = 2x^3 - x + 2; B = 3x^2 - 4x - 5; C = x^3 - 4x - 7.$$

Să se calculeze:

$$a) A + B + C; b) A - B + C; c) A + B - C.$$

13. Să se scrie sub forma de expresie ordonată după puterile descrescătoare ale lui 10 numerele.

$$a) 8,372; b) 3,056; c) 18,259; d) 6,005.$$

14. Luam două numere oarecare, de exemplu 9 și 5. Avem:

$$9 + 5 = 14; 9 - 5 = 4; 14 + 4 = 18; 14 - 4 = 10.$$

18 este dublul lui 9, iar 10 este dublul lui 5. Să se cerceteze dacă acest lucru se adăverește și în alte cazuri. Să se demonstreze acest lucru, notând numerele cu a și b și făcând cu ele aceleași operații ca în exemplul dat.

15. Luam trei numere oarecare, de exemplu, 5, 10 și 12. Avem: $5 + 10 = 12 - 3$; $5 + 12 = 10 - 7$; $10 + 12 = 5 + 17$; $3 + 7 = 17 - 27$. Suma numerelor pe care le-am luat este tot 27. Să se verifice acest fapt și pe alte exemple. Să se arate că ceea ce s-a constatat pe aceste exemple se adăverește totdeauna.

16. Luam două numere oarecare, de exemplu 7 și 10. Avem:

$$7 + 10 = 4; 2 \cdot 10 - 7 = 13; 4 + 13 = 17.$$

$$12. a) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x + 1}{x - 1};$$
$$b) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

Suma celor două numere pe care le-am luat este tot 17. Să se demonstreze că acest fapt se adeverește, oricare ar fi numerele pe care le luăm la început.

17. Se consideră suma a două numere oarecare a și b . Adăugăm la a un număr oarecare n , scădem din b același număr și calculăm suma acestor numere. Să se compare această sumă cu suma numerelor a și b . Ce proprietate a adunării apare aici?

18. Se consideră două numere oarecare a și b . Adăugăm atât la a cât și la b un număr oarecare n și facem diferența dintre aceste sume. Să se compare această diferență cu diferența dintre numerele luate la început. Aceeași chestiune, dacă scădem atât din a cât și din b același număr n . Ce proprietate a scăderii apare aici?

19. Să se demonstreze că, dacă la un număr de două cifre, în care cifra zecilor este mai mare decât cifra unităților, adăugăm diferența cifrelor, obținem un număr divizibil cu 11. Să se dea exemple; cum trebuie procedat când cifra unităților este mai mare?

20. Să se demonstreze că: $a)$ un număr de 3 cifre, în care cifra zecilor este zero, iar cifra sutelor este egală cu cifra unităților, este divizibil cu 101; $b)$ un număr de 4 cifre, în care prima cifra este egală cu ultima, iar cele două cifre de

19. Un monom este divizibil prin fiecare dintre factorii săi. Exemplu: $3xy$ este divizibil prin 3, prin x și prin y , x și y fiind numere întregi. $(10a + b) + (a - b) = 11a$ este divizibil cu 11; $10a - b - (b - a) = 11a$. **20.** Numărul este de forma: $100a + a = 101a$.

La mijloc sînt zerouri, este divizibil cu 1 001. Să se stabilească o proprietate, sen anafoare a numerelor de 5 cifre, 6 cifre ș.a.m.d.

21. Să se demonstreze ca: a) un număr de două cifre, în care cele două cifre sînt egale între ele, este divizibil cu 11; b) un număr de trei cifre, în care toate cifrele sînt egale între ele, este divizibil cu 111. Să se extindă această proprietate asupra numerelor de 4 cifre, 5 cifre ș.a.m.d.

22. Să se demonstreze ca, dacă două numere împarțite la 8 dau același rest, diferența lor este divizibilă cu 8. Extindere pentru cazul cînd, în locul lui 8, se considera un număr oarecare.

23. Într-o familie sînt doi frați, unul are x ani, iar celălalt are y ani ($x > y$). Ce vîrstă va avea fiecare din ei peste n ani și care va fi atunci diferența dintre vîrstele lor? Ce vîrstă a avut fiecare la x cu n ani în urmă și care a fost atunci diferența dintre vîrstele lor? Să se compare aceste diferențe cu diferența dintre vîrstele lor de acum.

24. Într-o familie sînt doi frați, A și B. Luăm cazul cînd A are 13 ani și B are 17 ani. Câți ani a avut A cînd B a avut 13 ani? Câți ani va avea B cînd A va avea 17 ani? Să se compare suma acestor vîrste cu suma vîrstelor de acum a celor doi frați. Să se ia și alte exemple. Să se noteze vîrstele celor doi frați cu x și y și să se demonstreze că ceea ce s-a constatat pe aceste exemple se adevărește totdeauna.

$$\begin{array}{r} \text{24. } x - (y - x) = x - 2x = -x \\ 2x - y + 2y - x = x + y \end{array} \quad \begin{array}{r} - \\ y - (y - (y - x)) = 2y - x \end{array}$$

30. Să se efectueze și să se facă proba prin substituție dând literelor valorile corespunzătoare:

- a) $(x+2)(x+3)$; b) $(a-1)(a+2)$
 c) $(1-2b)(b-1)$; d) $(x^2+1)(2x-1)$
 e) $(x^2+2x-1)(x^2-3x+2)$; f) $(x^2+2x-1)(x^2-3x+2)$; g) $(4x^2-6xy+3y^2)(2x+3y)$;
 h) $(a^2+2ab+4b^2)(a-2b)$.

31. Să se efectueze înmulțirile următoare așezând lucrările ca la § 46; 4). Se va face proba prin substituție.

- a) $(8x^3+4x^2+2x+1)(2x-1)$;
 b) $(3x^2-4x+1)(-2x^2+3x-1)$;
 c) $(x^2+x+2)(3x^2-4x-2)$;
 d) $(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)$;
 e) $(32a^5+16a^4+8a^3+4a^2+2a+1)(2a-1)$.

32. Să se efectueze și să se facă proba prin substituție:

- a) $(x^2-1)(2x-1) - (x^2+x+2)(x-2) - x(x^2-2)$;
 b) $(2x^2-x+3)(x+2) - 3(x^2-x+1) - x(x-1)$;
 c) $(x^2+x+1)(x-2) - (x^2-x+1)(2x-1)$.

33. Să se efectueze:

- a) $(2x+y)(x-2y)(x+y)$;
 b) $(a+b)(a-2b)(3a-2b)$;
 c) $(x+1)(2x-1)(x+2) - (x-1)(2x+1)(x-2)$.

30. e) $2x^3-9x^2+13x-6$; f) a^4-12a^2+4 ; g) $8x^3+27y^3$; h) a^3-8b^3 . **32.** a) -3 ; b) $2x^3+10x+9$;
 c) $x^4-2x^3-4x^2-1$; **33.** a) $2x^3-x^2y-5xy^2-2y^3$;
 b) $3a^3-5a^2b-4ab^2-4b^3$; c) $10x^2-4$.

Calcul prescurtat

34. Să se calculeze:

- $a) (r - 1)(r - 1);$ $b) (a - 2)(a - 2);$
 $c) (q - 3)(q - 3);$ $d) (2m - 1)(2m - 1);$
 $e) (3a - 2)(3a - 2);$ $f) (a + c)(a + c);$
 $g) (c - 2a)(c - 2a);$ $h) (x^2 + 2y)(x^2 + 2y);$
 $i) (ab + 5)(ab + 5).$

35. Să se calculeze:

- $a) (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1);$
 $b) (a + 3)(a - 3)(a^2 + 9);$
 $c) (2b - 3)(2b - 3)(4b^2 + 9);$
 $d) (m - n)(m - n)(m^2 + n^2).$

36. Să se pună sub formă de produs:

- $a) m^2 - 25;$ $b) 4c^2 - 1;$ $c) a^2 - 16x^2;$
 $d) 9c^2 - 4a^2;$ $e) b^2 - 1;$ $f) 16x^2 - y^2.$

37. Să se calculeze:

- $a) 37^2 - 35^2;$ $b) 8315^2 - 8314^2;$ $c) \left(7\frac{5}{8}\right)^2 - \left(2\frac{3}{8}\right)^2;$
 $d) 387^2 - 377^2;$ $e) \left(7\frac{5}{8}\right)^2 - \left(2\frac{3}{8}\right)^2;$ $f) 87^2 - 13^2.$

38. Să se calculeze mintal, pe baza formulei
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, produsele:

- $a) 51 \cdot 49;$ $b) 52 \cdot 48;$ $c) 97 \cdot 33;$
 $d) 5\frac{1}{2} \cdot 6\frac{1}{2};$ $e) 3,1 \cdot 2,9;$ $f) 9,7 \cdot 10,3;$
 $g) 5,8 \cdot 6,2.$

39. Să se calculeze:

- $a) (x + 1)^2$; $e) (2p + 1)^2$; $i) (5x + 2a)^2$;
 $b) (a + 2)^2$; $f) (a + 3c)^2$; $j) (x + 3y^2)^2$;
 $c) (m + 3)^2$; $g) (a + 2b)^2$; $k) (3a^2 + 5m)^2$;
 $d) (m + 1)^2$; $h) (2a + 3c)^2$; $l) (2ab + 3c)^2$.

40. Să se calculeze:

- $a) (3x + 1)^2$; $b) (2a + 5b)^2$; $c) (5m^2 + 3)^2$;
 $d) (2a^2 + 2,5x^3)^2$; $e) (b^3 + 2a)^2$; $f) (5x^2 + 3y^2z)^2$.

41. Să se efectueze și să se facă proba prin substituție:

- $a) (2x + 1)(x + 2) = (x + 1)(x + 1)$;
 $b) 3(a + 2)(a + 2) = 2(2a + 1)(2a + 1)$;
 $c) (y + 3)(2y + 1) = (y + 2)^2$;
 $d) 3(m + 1)^2 + 2(m + 1)^2 = 4(m + 2)^2$;
 $e) 2(a + c)(a + c) + 5(a + 2c)(a + 2c) =$
 $= 3(2a + c)(2a + c)$;
 $f) x(2x + 1)^2 + 2x(x + 1)(x + 1) = 5x(x + 2)^2$.

42. Să se calculeze prin două metode, efectuând înmulțirea și aplicând formulele de calcul prescurtat:

- $a) (r + 3)(r + 3)$; $b) (2a + 1)(2a + 1)$;
 $c) (3a + 2)^2$; $d) (5x + 2)^2$.

41. $a) x^2 + 3x + 1$; $b) 5a^2 + 10$; $c) y^2 + 2y + 7$;
 $d) m^2 + 18m + 11$; $e) 5x^2 + 10x + 1$; $f) 3x^3 + 8x^2 + 13x$.

43. Să se calculeze după procedeul de la § 53:
a) 38^2 ; b) 52^2 ; c) 29^2 ; d) 46^2 ; e) 87^2 ; f) 73^2 .

44. Să se calculeze valorile aproximative ale expresiilor următoare (v. § 54):

a) $1,01^2$; b) $1,0005^2$; c) $1,04^2$; d) $0,9997^2$; e) $0,991^2$;
f) $1:1,0002$; g) $1:1,0007$; h) $1:0,999$; i) $1:0,99998$.

45. $73^2 - 5\,329$; $24^2 - 576$. Diferența acestor numere, adică $4\,753$, va fi un număr prim sau compus? În general, o diferență de pătrate perfecte este un număr prim sau neprim?

46. Să se demonstreze că:

a) pătratul unui număr cu soț este divizibil cu 4; pătratul unui număr divizibil cu 3 este divizibil cu 9; pătratul unui număr divizibil cu 4 este divizibil cu 16 ș.a.m.d.;

b) pătratul unui număr fara soț este un număr fără soț.

47. Să se demonstreze că un pătrat perfect, împărțit prin 4, dă restul zero sau 1 și niciodată 2 sau 3.

Indicație. Se va examina pe rînd cazul cînd numărul este cu soț ($2k$) și cel cînd este fara soț ($2k + 1$).

48. Două numere naturale consecutive de exemplu 25 și 26 sau 80 și 81 pot fi amîndoua pătrate perfecte?

45. Neprim. 46. b) $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$; primii doi termeni sînt cu soț, iar 1 este fara soț.

47. V. problema 46.

Indicație. Dacă cel mai mic dintre cele două numere este pătratul lui 3, pătratul perfect următor cel mai apropiat va fi $(x + 1)^2$. Care este varianta cea mai mică care o poate lua diferența lor?

49. Să se ia la rând pătratele perfecte $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 32^2 = 1024$ și să se determine resturile împărțirii lor prin 3. Ce se observă? Să se demonstreze că un pătrat perfect, împărțit prin 3, da restul zero sau 1 și niciodată 2.

Indicație. Orice număr natural este de forma $3k$, sau $4 = 3 \cdot 1 + 1$, sau $3k + 2$. Se ridică aceste expresii la puterea 2, se află restul împărțirii prin 3.

Împărțirea. Factor comun

50. Să se efectueze împărțirile următoare:

a) $6x:2$; b) $10a:(-2)$; c) $(-6x):(-3)$;

d) $7a^3:a$; e) $10a:(-2a)$; f) $(3a^2b^3):ab$;

g) $8a^2bc:(-4abc)$; h) $-20m^2np:5mp$.

51. a) $(6x^3 - 8x^2 + 10x):2x$;

b) $(15a^2x - 12ax^2 + 18ax):(3ax)$;

c) $(24m^3 - 18m^2 + 30m):6m^2$;

d) $(6ab^2 - 15a^2b + 12a^2b^2 - 3ab^3):(-3ab)$.

52. Să se descompună în factori (prin scoaterea factorului comun):

a) $5x - 5y$; b) $3m + 3n$; c) $4a - 4b$;

d) $3m - 15$; e) $7p - 35$; f) $8y - 12$;

g) $ax + bc$; h) $mx - my$; i) $3ax - 6ay$;

j) $ab - a$; k) $ax + ay + az$; l) $3x + 6y - 3$.

53. Să se descompună în factori:

- a) $x^3 - x^2$; b) $3a - 3a^2$;
c) $5x^3 - 10x^2 - 15x$; d) $m^3 + m^2 + m$;
e) $(a + b)x - (a - b)y$; f) $(a - x)m + (a - x)n$;
g) $3(a - b - 1) - x(a + b + 1)$.

54. Să se descompună în factori:

- a) $ax + ay - bx - by$; b) $ma - mb + na - nb$;
c) $2ax + bx + 2ay + by$;
d) $3x^2 + 6xy + 4ax + 8ay$.

55. Să se descompună în factori:

- a) $x^2 - 1$; b) $m^2 - 9$; c) $4x^2 - 25$.

56. Să se afle c.m.m.m.c. al monomialilor:

- a) $3x, 2x, 4x$; b) a, a^2, a^3 ;
c) $6m, 3m^2, 2m$; d) x^2, xy, y^2 ;
e) $2a, 4b, 6$; f) $6a^2, 4a, 6b^2$;
g) $4m^2, 2m, 8n^2$; h) $12ax, 4x^2, 2x^2$.

57. Să se afle c.m.m.m.c. al expresiilor:

- a) 3 și $a + b$; b) $x + 1$ și 2; c) $3x + 3$ și 6,
d) $2x + 4, 3x + 6$ și $4x + 8$;
e) $ax + ay, 4x + 4y, 2x + 2y$ și $bx + by$.

58. Să se scrie un multiplu oarecare al numărului a și un alt multiplu oarecare al lui a . Să se demonstreze că suma lor este tot un multiplu al lui a .

-
53. e) $(a + b)(a - b)$; f) $(a - x)(m + n)$;
g) $(a + b - 1)(x + y)$.

54. a) $(a + b)(x - y)$; b) $(m + n)(a - b)$;
c) $(x + y)(2a + b)$; d) $(3x + 4a)(x + 2y)$.

59. Să se demonstreze că: *a)* un număr de 4 cifre în care primele două cifre sînt egale între ele și ultimele două cifre sînt egale între ele este divizibil cu 11; *b)* un număr de 6 cifre în care primele 3 cifre sînt egale între ele și ultimele 3 cifre sînt egale între ele este divizibil cu 111. Să se extindă asupra cazului unui număr format din 8 cifre, 10 cifre ș.a.m.d.

60. Să se demonstreze că: *a)* dacă la dreapta unei cifre scriem aceeași cifră, obținem un număr divizibil cu 11; *b)* dacă la dreapta unui număr de două cifre scriem aceleași două cifre, în aceeași ordine (de exemplu, din 23 formăm numărul 2323) obținem un număr divizibil cu 101 și să se afle cîtul; *c)* dacă facem operația analogă cu un număr de 3 cifre, obținem un număr divizibil cu 1 001. Să se dea exemple.

61. Să se demonstreze că, dacă dintr-un număr natural oarecare se scade suma cifrelor, se obține un număr divizibil cu 9 și să se afle cîtul. (Se va lua, de exemplu, cazul cînd numărul este format din 3 cifre.)

62. Să se demonstreze că, dacă într-un număr de trei cifre, cifra zecilor este zero, suma ce se obține adunînd numărul cu rasturnatul sau este divizibilă cu 101 și să se afle cîtul.

Rasturnatul unui număr se obține scriind cifrele sale în ordine inversă. Exemple: rasturnatul lui 823 este 328; rasturnatul lui 6 358 este 8 536.

59. *a)* $1\,000a + 100a + 10b + b = 1\,100a + 11b = 11(100a + b)$. **61.** Cîtul este $11a + b$, unde a este cifra sutelor, iar b este cifra zecilor. **62.** Cîtul este $a + b$, a și b fiind cifrele diferite de zero ale numărului.

63. Să se demonstreze că diferența dintre un număr de 3 cifre și răsturnatul său este divizibilă cu 99.

PROBLEME DIVERSE

64. Să se demonstreze că: *a)* suma a două numere pare este un număr par, *b)* suma a două numere impare este un număr par, *c)* suma a două numere dintre care unul este par și celălalt impar este un număr impar.

65. Să se demonstreze că suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3. Să se dea exemple. Numerele se vor nota cu $x - 1, x, x + 1$.

66. *a)* Să se demonstreze că dacă la pătratul unui număr natural adăugăm acel număr, obținem produsul dintre numărul dat și numărul următor. Să se dea exemple. *b)* Să se studieze cazul când din pătratul unui număr oarecare scădem acel număr.

67. Să se demonstreze că diferența pătratelor a două numere naturale consecutive este egală cu suma celor două numere. Să se dea exemple.

68. Să se demonstreze că diferența pătratelor a două numere luate succesiv este de 1 ori numărul cuprins între ele. Să se dea exemple.

Numerele se vor nota cu $2x - 1, 2x + 1$.

69. Să se demonstreze că produsul a două numere luate succesiv mărț cu 1 este un pătrat perfect.

70. Se consideră trei numere naturale consecutive înmulțim primul cu al doilea și al doilea cu al treilea. Să se demonstreze că: *a)* suma acestor produse este dublul pătratului numărului mijlociu, *b)* diferența acestor produse este dublul numărului mijlociu.

71. Se considera două numere de două cifre, în care cifra zecilor este 1, de exemplu 12 și 15, sau 13 și 18. Acestea două numere sunt de forma $10 + a$ și $10 + b$. Să se arate că produsul lor poate fi pus sub forma:

$$10 [(10 + a) + b] + ab.$$

72. Căutăm $a = c$, a și c fiind prima și ultima cifre a numărului.

Să se deducă de aici că înmulțirea se poate face cu în
exemplele următoare:

$$13 \cdot 18 = ? \text{ Zicem: } 13 + 8 = 21 \dots 210,$$

$$3 \cdot 8 = 24, 210 + 24 = 234;$$

$$15 \cdot 19 = ? \text{ Zicem: } 15 + 9 = 24 \dots 240,$$

$$5 \cdot 9 = 45, 240 + 45 = 285.$$

72. Se consideră două numere de două cifre, a și b , cu 12 și 3
sau 24 și 27, în care cifra zeilor este aceeași, iar suma
cifrelor în talia este 10. Aritmetica numere se poate face
sub forma $10a + b$ și $10b + a$, cu condiția $a + b = 10$.
Să se arate că produsul lor poate fi pus sub forma:

$$100a(a+1) + bc.$$

Să se examineze și cazul cînd se obțin produse cu sa-
gură cifră (de ex.: $29 \cdot 21$).

Să se deducă de aici că înmulțirea a două numere cu
numere se poate face procedeu de ca în exemplele urmatoare:

$$32 \cdot 38 = ? \text{ Zicem: } 3 \cdot 4 = 12, 2 \cdot 8 = 16.$$

Rezultatul este 1 216;

$$53 \cdot 57 = ? \text{ Zicem: } 5 \cdot 6 = 30, 3 \cdot 7 = 21.$$

Rezultatul este: 3 021.

73. Un număr format cu cifre de forma $10a + b$. Să
se arate că pătratul unui asemenea număr se poate scrie
sub forma: $100a(a+1) + 2b$. Să se deducă de aici că
pentru a ridica la pătrat un număr în care ultima cifră este 5
se poate proceda ca în exemplele urmatoare.

$75^2 = ?$ Zicem: $7 \cdot 8 = 56$, scriem: 56, iar la drept-
lui, 25. Rezultatul este: 5 625.

$135^2 = ?$ Zicem: $13 \cdot 14 = 182$, scriem 182 iar la drept-
lui, 25. Rezultatul este 1 8225.

Să se calculeze după acest procedeu pătratele numerelor
15, 25, 35,...,95.

74. Să se arate că $\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$ poate fi pus sub forma

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n + \dots$$

Inmulțirea

25. Să se efectueze, scriind rezultatul sub formă de putere, următoarele înmulțiri:

- a) $3^2 \cdot 3$; b) $2^5 \cdot 2^3$; c) $a^3 \cdot a^2$; d) $r \cdot r^3$; e) $y^4 \cdot y$;
f) $m^4 \cdot m^2 \cdot m$; g) $x^2 \cdot x \cdot x^4$.

26. Să se efectueze:

- a) $2x \cdot 3$; b) $3a^2(-4)$; c) $(-2a)(-5)$;
d) $(-2x) \cdot 3y$; e) $(-4) \cdot (-2xy)$; f) $2x^2 \cdot 4x$;
g) $3a^4 \cdot 2a$; h) $(-2a^2b) \cdot (2.5a)$; i) $3x^2y \cdot (-2y^2)$;
j) $2a \cdot 3b \cdot 5c$; k) $(-4x)(-2x) \cdot 5x$; l) $2a \cdot 5a^2 \cdot 4a^3$.

27. Să se facă figură, după modelul figurilor 12 și 13 prin care să se arate că:

- a) $(a + b + c)x = ax + bx + cx$;
b) $(a + b + c)(x + y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$;
c) $(a + b + c)(x + y + z) = ax + bx + cx + ay + by + cy + az + bz + cz$.

28. Să se efectueze înmulțirile:

- a) $(5x + 3y) \cdot 2$; b) $(2a - 5b) \cdot 4$;
c) $(x - 2a + 3b)(-2)$; d) $(a + b - c)(-2a)$;
e) $(2x^2 - 3x + 2)(-4x)$; f) $(5a^2 - 3a + 4)(-4a)$.

29. Să se efectueze operațiile următoare și să se facă proba prin substituție (v. § 43), dând literelor valorile indicate:

- a) $2(3x - 1) - 4(x + 2) + 2(x - 5)$; $x = 1$; $y = 2$;
b) $3(5a - 2b - 3c) - 4(b - 5a - 2a - b) + a - 3$; $a = 1$; $b = 2$;
c) $a^4 - 2x^2 - 3x - 2) - 4x^2(x^2 - x - 2)$; $x = 2$.

29. a) $8x - 11a - 6b$; c) $6a^3 - 4x - 6ax - 6a$.

care partea fracționară este $\frac{1}{2}$ - se poate ridica la pătrat, ca în exemplele următoare:

$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = ? \quad \text{Zicem: } 7 \cdot 8 = 56. \quad \text{Rezultatul: } 56\frac{1}{4}$$

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = ? \quad \text{Zicem: } 3 \cdot 4 = 12. \quad \text{Rezultatul: } 12\frac{1}{4}$$

75. Să se demonstreze că suma pătratelor a două numere naturale consecutive, x și $x + 1$, poate fi pusă sub forma $2x(x + 1) + 1$ și să se deducă un mijloc de a o calcula mai ușor. Exemplu: $15^2 + 16^2 = ?$; $15 \cdot 16 = 240$; $240 \cdot 2 = 480$; $480 + 1 = 481$. Rezultatul: 481.

76. Avem un pătrat cu latura a . Mărim una din laturile lui cu o cantitate oarecare x și micșorăm cealaltă latură tot cu x . Să se compare perimetrul și aria pătratului inițial cu perimetrul și aria dreptunghiului obținut. Să se deducă de aici că: dintre toate dreptunghiurile care au același perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

77. Jocuri. a) Alege-ți un număr oarecare, adaugă-i 1, înmulțește suma cu 2, adaugă 3, înmulțește suma obținută cu 4, scade din acest produs de 8 ori numărul pe care ți l-ai ales. Ți-a ieșit 20!

Explicație. S-au făcut cu un număr necunoscut x operațiile indicate de expresia:

$$4[2(x + 1) + 3] - 8x.$$

Efectuând calculele, se obține rezultatul 20, oricare ar fi x . Se știe dinainte că rezultatul va fi 20.

b) Alege ți un număr oarecare, fă operațiile ca mai sus, dar la urmă, în loc să scazi de 8 ori numărul de la început, scade 20 și spune mi cit ți-a ieșit! Împart rezultatul prin 8 și află numărul pe care l ai ales.

Explicație. Se folosește identitatea:

$$4[2(x + 1) + 3] - 20 = 8x.$$

După acest model se pot compune alte jocuri. Sau „ghicim” rezultatul sau cerem rezultatul și „ghicim” numărul ales.

c) Scris data zilei tale de naștere, înmulțește acest număr cu 5, adaugă numărul lunii în care te-ai născut, înmulțește rezultatul cu 2 și scade numărul lunii în care te-ai născut. Spune mi cât ți-a ieșit!

Ultima cifră reprezintă luna în care te-ai născut, iar prima cifră (sau primele două cifre) reprezintă data zilei. De exemplu, dacă rezultatul este 83, data nașterii este 8 martie; dacă rezultatul este 257, data nașterii este 25 iulie.

Explicație. $2(5a + b) - b = 10a + b$.

Rezultatul este valabil numai dacă b este un număr de o singură cifră, adică persoana cu care joci este născută într-una din primele nouă luni ale anului. Dacă persoana este născută în octombrie, noiembrie sau decembrie, se procedează astfel: prima cifră (sau primele două cifre), înmulțită cu 1, dă data zilei, iar ultima cifră, mărită cu 10, indică luna. De exemplu, dacă rezultatul este 191, data nașterii este 18 noiembrie; ea poate fi însă și 19 ianuarie, deoarece $191 = 19 \cdot 10 + 1$ și $191 = 18 \cdot 10 + 11$.

În asemenea cazuri (când ultima cifră a rezultatului este 1 sau 2), trebuie pusă și întrebarea suplimentară dacă persoana cu care joci e născută în prima sau în a doua jumătate a anului.

Capitolul IV Fracții Algebrice

59. Ce este o fracție algebrică. Expresia

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1} = \frac{a^2 - 2a + 1}{(a - 1)(a + 1)}$$

se numește fracție algebrică. Expresia care este divizibilă prin unul din factorii care compun numitorul fracției, iar expresia scrisă sub linia fracției este numită *numărător* fracției.

O fracție algebrică reprezintă o *funcție numărătorul și numitorul ei*.

De exemplu $\frac{2x}{x-1}$ este o expresie care înmulțită cu x dă a ; $\frac{2x}{x-1}$ este o expresie care înmulțită cu $(x-1)$ dă $2x+3$.

Acum definiție corespunde celei din aritmetica. De exemplu $\frac{3}{8}$ este cîntul dintre 3 și 8.

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \text{cîci} \quad \frac{3}{8} \cdot 8 = 3 \quad \text{și} \quad \frac{3}{8} \cdot 3 = \frac{9}{8}.$$

60. Valeri pentru care o fracție nu are sens. O fracție își pierde sensul cînd numitorul ei are valoarea zero. Astfel, fracția $\frac{a}{x}$ își pierde sensul

cind $x = 0$; fracția $\frac{2x+3}{x-1}$ își pierde sensul cind $x = 1$.

61. **Amplificarea și simplificarea fracțiilor.** O fracție algebrică, ca orice expresie algebrică, reprezintă un număr. Fie, de exemplu, fracția:

$$\frac{2x+1}{x-2},$$

pentru $x = 3$, ea reprezintă numărul $\frac{11}{1}$; pen-

tru $x = 4$, ea reprezintă numărul $\frac{9}{2}$.

De aceea, fracțiile algebrice au aceleași proprietăți ca și fracțiile ordinare.

Cind înmulțim ambii termeni ai unei fracții algebrice cu aceeași expresie, sau cind îi împărțim prin aceeași expresie, obținem o fracție egală cu fracția dată.

Transformarea este permisă numai cîtă vreme expresia cu care înmulțim sau prin care împărțim este *diferită de zero*.

Exemple. a) $\frac{3a^2b}{6ab^2} = \frac{a}{2b}.$

Am simplificat coeficienții cu 3, apoi am împărțit ambii termeni prin a , apoi prin b . Se poate spune că am simplificat fracția cu $3ab$.

$$b) \frac{6x+12}{4x+8} = \frac{6(x+2)}{4(x+2)} = \frac{3}{2}.$$

Aici am la numărător factorul comun 6 , iar la numitor factorul comun 4 , apoi am simplificat cu 2 și cu $x+2$.

62. Observări. 1) Simplificarea fracțiilor se poate face numai cînd termenii fracției sînt produse.

Cînd sînt sume, sau diferențe, este necesar să descompunem în factori dacă se poate și să simplificăm apoi prin factorul comun.

2) Frația simplificată este identică cu cea de la început numai cîtă vreme expresia cu care se simplifică este diferită de zero.

E x e m p l u.
$$\frac{x^2 - x}{2x - 2} = \frac{x(x - 1)}{2(x - 1)} = \frac{x}{2}.$$

Fracția dată are sens numai cînd $x \neq 1$ (pentru $x = 1$ numitorul ei se anulează), iar fracția de la rezultat are sens pentru orice valoare a lui x . Această nepotrivire se datorește faptului că am simplificat cu $x - 1$, care ia valoarea zero pentru $x = 1$.

63. Adunarea și scăderea fracțiilor. 1) Cînd fracțiile au același numitor, se face suma algebrică a numărătorilor și se lasă numitorul neschimbat.

E x e m p l u.

$$\frac{a-1}{4} + \frac{a-3}{4} = \frac{a-1}{4} + \frac{a-3}{4} = \frac{2a-2}{4} = \frac{2(a-1)}{4} = \frac{a-1}{2}.$$

Am redus termenii asemenea de la numărător, am scos factorul comun 2 și am simplificat cu 2.

2) Cînd numărătorul fracției are mai mulți termeni, linia de fracție ține loc de paranteză. Cînd scriem toți termenii cu un singur numitor (cu o linie de fracție lungă), procedăm ca la desfacerea parantezelor: cînd în față fracției se găsește semnul $+$, luăm toți termenii cu semnele lor

iar cind în fața fracției se găsește semnul —, schimbăm semnele tuturor termenilor de la numărător:

$$\frac{r-1}{8} + \frac{r-1}{8} - \frac{2r-4}{8} - \frac{r+1}{8} - \frac{r-2}{8} - \frac{2r-4}{8} = -\frac{2r-7}{8} - \frac{2r-7}{8}.$$

De obicei, se evita ca primul termen al numărătorului să aibă semnul —, ca să nu se confunde cu semnul — din fața fracției. De aceea am pus — în fața fracției și am schimbat semnele tuturor termenilor de la numărător.

$$3) \quad \frac{a-b}{4} + \frac{2a-b}{6} - \frac{a-2b}{3}.$$

Numitorul comun este 12. Amplificăm prima fracție cu 3, a doua cu 2 și a treia cu 4. Obținem:

$$\frac{3a-3b}{12} + \frac{4a-2b}{12} - \frac{4a+8b}{12} = \frac{3a+3b}{12} = \frac{3(a+b)}{12} = \frac{a+b}{4}.$$

$$4) \quad \frac{a-b}{b} - \frac{a-b}{a}.$$

Numitorul comun este ab . Amplificăm prima fracție cu a și a doua cu b . Obținem:

$$\frac{a^2+ab-ab+b^2}{ab} = \frac{a^2+b^2}{ab}.$$

5) O expresie întreagă (care nu este fracționară) este considerată ca o fracție cu numitorul 1:

$$2a - \frac{3a-b}{2} = \frac{4a-3a+b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

64. Înmulțirea și împărțirea fracțiilor. Și aceste operații se fac după regulile învățate la aritmetică.

1) Pentru a înmulți două fracții algebrice, înmulțim numărătorii între ei și numitorii între ei.

E x e m p l e.

$$a) \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^2}{6}; \quad b) \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{c} = \frac{a^2-b^2}{2c}.$$

Cînd se poate, facem simplificări înainte de a efectua înmulțirea:

$$\frac{2a^3}{x} \cdot \frac{b}{6a^2} = \frac{3a^2}{y} \cdot \frac{abx}{y}.$$

Se suprimă coeficientul 2 de la primul numărător, iar coeficientul 6 de la numitorul al doilea se înlocuiește cu 3; apoi se suprimă acest număr și coeficientul 3 de la numărătorul al treilea; apoi se suprimă a^2 de la numitorul al doilea și exponentul 3 de la a^3 ; în sfîrșit, se suprimă x de la primul numitor și exponentul 2 de la a^2 .

2) Pentru a împărți o fracție printr-o altă fracție, se înmulțește prima fracție cu inversa fracției a doua.

E x e m p l e.

$$a) a : \frac{2}{x} = \frac{a}{1} \cdot \frac{x}{2} = \frac{ax}{2},$$

$$b) \frac{3a-2b}{ax} : \frac{3a-2b}{4ay} = \frac{3a-2b}{ax} \cdot \frac{4ay}{3(a-b)} = \frac{4y}{3x}.$$

65. **Expresii algebrice fracționare.** Numărătorul și numitorul unei fracții algebrice pot fi la rândul lor, fracții. Pentru a pune o expresie de acest fel („fracție etajată”) sub forma cea mai simplă, se efectuează separat calculele de la numărător și de la numitor și se împarte numărătorul prin numitor.

E x e m p l u.

$$\begin{array}{l} a + \frac{a}{a-1} + \frac{a^2}{a-1} = \frac{a}{a-1} + \frac{a}{a-1} + \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2 + 2a}{a-1} = \frac{a(a+2)}{a-1} \\ a + \frac{a}{a-1} + \frac{a^2}{a-1} = \frac{a}{a-1} + \frac{a}{a-1} + \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2 + 2a}{a-1} = \frac{a(a+2)}{a-1} \end{array}$$

66. **Observare despre fracțiile algebrice.** În cele ce precedem am preluat din aritmetica proprietățile fracțiilor și regulile operațiilor cu fracții. Dar în aritmetica proprietățile fracțiilor și regulile operațiilor cu fracții se stabilesc numai pentru cazul când ambele termeni sunt numere naturale, de exemplu $\frac{3}{4} + \frac{5}{11}$. În algebra însă, literele reprezintă numere raționale oarecare, întregi sau fracționare, pozitive sau negative. De asemenea și valorile numerice ale diferitelor expresii pot fi numere raționale oarecare.

Într-un studiu mai adâncit, trebuie demonstrat că toate s-a stabilit în aritmetica despre fracții rămân valabile și pentru fracțiile algebrice.

EXERCIIU

Valoarea numerică a unei fracții

4. Să se calculeze valorile numerice ale fracțiilor următoare:

a) $\frac{a}{a-1} + \frac{a^2}{a-1}$ pentru $x = -\frac{2}{3}$ și $x = 3\frac{1}{2}$;

b) $\frac{a}{a-1} + \frac{b}{a-1}$ pentru $a = 5$, $b = \frac{1}{4}$;

$$c) \frac{2x-3y}{3x-2y} \text{ pentru } x = -4, y = -\frac{1}{6};$$

$$d) \frac{2x^2-x}{1-x^2} \text{ pentru } x = -3 \text{ și } x = 10.$$

2. O fracție anunită $\frac{x}{y}$ are aceeași valoare, oricare ar fi valoarea pe care o dăm lui y . Ce valoare are x ?

3. Pentru ce valori ale literelor, expresiile următoare își pierd sensul?

$$a) \frac{x}{x-2}; \quad b) \frac{a}{a-b}; \quad c) \frac{y^2+1}{2y-1}; \quad d) \frac{x+y}{x-2y}.$$

4. Un metru de pînza costă x lei și se ieftinește cu 2 lei. Câți metri de pînza putem cumpăra cu 100 lei? Pentru ce valoare a lui x fracția obținută își pierde sensul? Care este semnificația concretă a acestui fapt?

5. Viteza maximă a unui tren este de c km/oră. În medie, viteza trenului este cu 5 km/oră mai mică. În cît timp parcurge trenul un drum de s km cu viteza medie? Pentru ce valori ale lui c fracția obținută își pierde sensul? Explicație.

6. Să se arate care dintre fracțiile următoare reprezintă o fracție supraunitară și care o fracție subunitară. Literele reprezintă numere naturale.

$$a) \frac{m}{m+1}; \quad b) \frac{a-1}{a+1}; \quad c) \frac{x+2}{x+1}; \quad d) \frac{2x+1}{x+1}.$$

$$1. a) -1 \frac{1}{7}; \quad \frac{3}{13}; \quad b) \frac{17}{2}; \quad c) \frac{33}{62}; \quad d) -2 \frac{5}{8}; \quad -1 \frac{91}{99}.$$

$$3. a) x = 2; \quad b) a = b; \quad c) y = 0,5; \quad d) x = 2y.$$

$$4. x = 2. \quad 5. y = 5.$$

7. Să se pună între fracțiile următoare semnul $<$ sau $>$, după cum este cazul (x reprezintă un număr pozitiv).

$$a) \frac{x+1}{3} \text{ și } \frac{1}{3}; \quad b) \frac{2}{3+x} \text{ și } \frac{2}{3};$$

$$c) \frac{18+x}{25} \text{ și } \frac{x}{25}; \quad d) \frac{3}{x+7} \text{ și } \frac{3}{7}.$$

Simplificarea fracțiilor

8. Să se simplifice:

$$a) \frac{2x}{2y}; \quad b) \frac{5a}{5b}; \quad c) \frac{42a}{48b}; \quad d) \frac{24a^2}{35b^2}; \quad e) \frac{7c}{8c};$$

$$f) \frac{x^2}{x^2}; \quad g) \frac{3(a+b)}{4(a+b)}; \quad h) \frac{5(m-n)}{9(m-n)}; \quad i) \frac{a \cdot c}{a \cdot y};$$

$$j) \frac{3a^2}{a^3}; \quad k) \frac{m}{m^2}; \quad l) \frac{a^3}{a^5}; \quad m) \frac{4x^2}{10x^2}; \quad n) \frac{8a^2m}{12am^2};$$

$$o) \frac{12x^2(a-b)}{15x^2(a-b)}; \quad p) \frac{3(x+y)}{5(x+y)^2}.$$

9. Să se simplifice fracțiile următoare, punând mai întâi numărătorul și numitorul sub forma de produs:

$$a) \frac{4a+8}{4a+12}; \quad b) \frac{6c+15}{9c+12}; \quad c) \frac{2m+6}{5m+15};$$

$$d) \frac{8a+12c}{12a+18c}; \quad e) \frac{ac+a}{bc+b}; \quad f) \frac{bm+b}{cm+c};$$

$$g) \frac{ax+bx}{ay+by}; \quad h) \frac{am+2bm}{2an+4bn}; \quad i) \frac{ar^2+2ar}{br^2+2br}.$$

$$9. a) \frac{a+2}{a+1}; \quad b) \frac{2x+5}{3x+4}; \quad c) \frac{2}{5}; \quad d) \frac{2}{3}; \quad e) \frac{a}{b}; \quad f) \frac{b}{c};$$

$$g) \frac{1}{y}; \quad h) \frac{m}{2n}; \quad i) \frac{a}{c}; \quad 10. a) \frac{1}{2}; \quad b) \frac{1}{3}; \quad c) \frac{m+1}{3};$$

10. Să se simplifice:

$$a) \frac{a^2 - 4}{a^2 + 4} ; \quad b) \frac{2a + 6}{a^2 - 9} ; \quad c) \frac{m^2 - 4}{3m + 3} ;$$

$$d) \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} ; \quad e) \frac{x^2 - 4y^2}{(x - 2y)^2} ; \quad f) \frac{3a^2 - 12b^2}{5a - 10b} .$$

11. Să se scrie sub formă de fracție împărțirile următoare și să se simplifice:

$$a) 6a^2x : 3ax^4 ; \quad b) (3a - 3b) : (2a - 2b) ;$$

$$c) 12a(x - y)^2 : [1 - 8a^2(x - y)] ;$$

$$d) (x^2 - 4p^2) : (3x - 6p) .$$

12. Se da fracția $\frac{3m}{5m - 5}$. Să se afle valoarea acestei fracții pentru $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ ș.a.m.d. Ce legatură există între valoarea lui m și numărul cu care se simplifica fracția obținută? Să se simplifice fracția dată și să se explice cele constatate pe exemplele luate.

13. a) În fracția $\frac{3x}{5x}$ înlocuim x printr-un număr oarecare. Se obține o fracție ecantibolă sau reducibilă?

$$d) \frac{a}{a} - \frac{b}{b} ; \quad e) \frac{x}{x} - \frac{2y}{2y} ; \quad f) \frac{a}{a} - \frac{2b}{2b} ; \quad 11. \quad a) \frac{1}{2} - \frac{1}{3} ;$$

$$c) \frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} ; \quad d) \frac{1}{2a} - \frac{1}{3a} .$$

b) În fracția $\frac{m-1}{m+1}$ înlocuim m printr-un număr fără soț. Va fi fracția obținută reducibilă sau ireducibilă?

c) Aceeași întrebare dacă înlocuim, în fracția $\frac{a-b}{a+b}$, a și b prin numere cu soț.

Adunarea și scăderea fracțiilor

14. Să se efectueze:

$$a) \frac{2a}{9} + \frac{5a}{9}; \quad b) \frac{5c}{7} - \frac{2c}{7}; \quad c) \frac{3r}{4} - \frac{r}{4};$$

$$d) \frac{5x}{8} - \frac{x}{8}; \quad e) \frac{2x}{9} - \frac{5x}{9}; \quad f) \frac{3x}{8} - \frac{7x}{8}.$$

$$15. a) \frac{a}{3} + \frac{x}{3}; \quad b) \frac{m}{12} - \frac{n}{12}; \quad c) \frac{2a}{7} - \frac{3b}{7};$$

$$d) \frac{3}{ax} + \frac{2}{ax}; \quad e) \frac{a}{n} + \frac{b}{n}; \quad f) \frac{3}{x+y} - \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x+y}$$

$$16. a) \frac{x+1}{4} + \frac{2x-1}{4} - \frac{x+2}{4};$$

$$b) \frac{2a-b}{3} - \frac{a+2b}{3} - \frac{a-2b}{3};$$

$$c) \frac{2x-3a+1}{2} - \frac{x+2a-3}{2} - \frac{a}{2};$$

$$d) \frac{3(a-1)}{5} - \frac{2(a-1)}{5} - \frac{4(a-1)}{5} - \frac{a-1}{5}.$$

$$16. a) \frac{1}{2}; \quad b) 0; \quad c) 2c-a-1; \quad d) \frac{3c-11}{5}.$$

$$17. a) \frac{x}{x-1} + \frac{y}{y-1} - \frac{2}{1};$$

$$b) \frac{x-2y-1}{2x-y} - \frac{x-2y-1}{2x-y};$$

$$\frac{3x-4y-2}{2x-y} - \frac{2}{2x-y};$$

$$c) \frac{2m-3n-1}{m-n} - \frac{3m-n-2}{m-n};$$

$$\frac{2m-3n-4}{m-n} - \frac{2m-n-5}{m-n};$$

$$d) \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b}; \quad e) \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b};$$

$$18. a) \frac{x}{2} + \frac{c}{3}; \quad b) \frac{a}{4} - \frac{a}{6}; \quad c) \frac{3m}{4} - \frac{m}{2};$$

$$d) \frac{5a}{6} - \frac{3b}{4} + \frac{b}{2} - \frac{2a}{3};$$

$$e) \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} + \frac{4x}{15} - \frac{5x}{6};$$

$$19. a) \frac{x}{8} - \frac{1}{2}; \quad b) \frac{m}{10} - \frac{1}{4} - \frac{m}{5} + \frac{1}{5};$$

$$c) \frac{25x}{18} - \frac{4}{9} + \frac{2x}{3} - \frac{1}{4};$$

$$d) \frac{4a}{25} - \frac{3b}{10} + \frac{4a}{5} - \frac{b}{2};$$

$$17. b) \frac{2(x-1)}{2x-y}; \quad c) 1; \quad d) 1; \quad e) 1.$$

$$18. a) \frac{5x}{6}; \quad b) \frac{a}{12}; \quad c) \frac{m}{4}; \quad d) \frac{2a-3b}{12}; \quad e) \frac{3x}{5};$$

$$19. a) \frac{x-4}{8}; \quad b) \frac{3(2m-5)}{20}; \quad c) \frac{74x-25}{36}; \quad d) \frac{24a+5b}{25};$$

$$20. a) \frac{2a-1}{4} - \frac{5a-2}{6}; \quad b) \frac{m-3}{4} - \frac{2m-3}{2};$$

$$c) \frac{a-2}{8} - \frac{a-1}{4} + \frac{2a-3}{12}; \quad d) 1 + \frac{a-1}{2};$$

$$e) x - x \frac{1}{2}; \quad f) 3a + \frac{a-3}{2}; \quad g) a + \frac{b}{2};$$

$$h) 2a - \frac{b}{3}; \quad i) \frac{x}{3} + 2y; \quad j) \frac{a}{2} - 3b.$$

$$21. a) \frac{x-2}{7} - \frac{2x-1}{2} + \frac{x+2}{14} - \frac{3x-1}{28};$$

$$b) \frac{c-2a+1}{4} - \frac{2a-a+3}{6} + 1;$$

$$c) \frac{x-2a+b}{15} - \frac{2x+4a-5b}{20} +$$

$$+ \frac{2x+a+b}{10} - \frac{x-7a}{30}.$$

$$d) \frac{2a-3b+c}{8} - \frac{3a-b-c}{12} +$$

$$+ \frac{a-b}{6} - \frac{2b-c}{4} - \frac{a-b-c}{2}.$$

$$20. a) \frac{1}{12}; \quad b) \frac{3}{4}; \quad c) \frac{a-18}{24}; \quad d) \frac{a}{2};$$

$$e) \frac{x-1}{2}; \quad f) \frac{7a-3}{2}.$$

$$21. a) \frac{11-25x}{28}; \quad b) \frac{x+4y-9}{12}; \quad c) \frac{8x+25b}{60};$$

$$d) -\frac{8a+11b-23c}{24}.$$

$$22. a) \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}; \quad b) \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2};$$

$$d) \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}; \quad e) \frac{2x}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2x-1}{3}; \quad f) \frac{2x+1}{2} - \frac{1}{2} = x.$$

$$23. a) \frac{1}{x} + \frac{1}{2}; \quad b) \frac{1}{a} - \frac{2}{3}; \quad c) \frac{3}{x} - \frac{2}{y};$$

$$d) 1 - \frac{2}{6}; \quad e) \frac{2x+1}{y} - \frac{1}{2}; \quad f) \frac{3}{2x} - 1.$$

$$24. a) \frac{2}{3a} - \frac{5}{2b}; \quad b) \frac{7}{4x} - \frac{2}{3y} + \frac{5}{2z} - \frac{1}{4};$$

$$c) \frac{5}{2x} - \frac{1}{4a} - \frac{1}{2xy}; \quad d) \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{4}.$$

$$25. a) \frac{3}{4a} + \frac{1}{2a} - \frac{5}{6a}; \quad b) \frac{4}{8x} - \frac{5}{4y} - \frac{1}{6z} + \frac{7}{10};$$

$$c) \frac{5}{12y} - \frac{4}{10y} + \frac{3}{10y} + \frac{4}{5a} - \frac{7}{50y}.$$

$$26. a) \frac{1}{2x} - \frac{3}{4x}; \quad b) \frac{3}{m^2} - \frac{1}{2m};$$

$$c) \frac{4}{m^2} - \frac{1}{mn} - \frac{1}{n^2}; \quad d) a + \frac{c-ab}{b}.$$

$$27. a) \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 1; \quad b) \frac{2x^2}{xy} - \frac{2}{xy} = \frac{2x^2-2}{xy};$$

$$c) \frac{3a}{bc} - \frac{2b}{ac} + \frac{5c}{ab}; \quad d) \frac{3a}{2a^2x} - \frac{x}{6a^2x} + \frac{2}{3a^2x}.$$

$$28. a) \frac{5}{12a}; \quad b) -\frac{31}{27a}; \quad c) \frac{61}{100y}.$$

$$29. c) \frac{4m^2 - 3mn + m^2}{m^2n^2}; \quad d) \frac{c}{b}.$$

$$30. c) \frac{3a^2 - 2b^2 - 4c^2}{abc}; \quad d) \frac{9a^2}{6a^2x^2} = \frac{3}{x^2}.$$

$$28. a) \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2}, \quad b) \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1}$$

$$c) \frac{1}{a+b} + \frac{a-b}{(a+b)^2}; \quad d) \frac{a-b}{a+2} - \frac{b-a}{3(a+2)}$$

$$29. a) \frac{2}{a-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$b) \frac{a-2}{2a-6} + \frac{2a-5}{3a-9} - \frac{a-4}{6a-18}$$

$$c) \frac{m-2n}{3m-3n} - \frac{3m-n}{2m-2n} + \frac{5m-1}{3m-m}$$

$$30. a) \frac{x+2}{x-1} - \frac{x-2}{x+1} + \frac{1}{x^2-1}$$

$$b) \frac{5}{6a-6b} + \frac{3}{2a-2b} - \frac{2}{3a-3b}$$

$$c) \frac{1}{a^2-1} + \frac{a^2}{2a-1} - \frac{2a}{a-2}$$

(31). Se dă expresia:

$$\frac{2x-a}{2} - \frac{x-2a}{4}$$

Să se dea lui x o valoare oarecare, de exemplu $x = 20$, iar lui a valorile: 1, 2, 3 ș.a.m.d., și să se calculeze valorile corespunzătoare ale expresiei. Ce se observă? Explicație.

$$28. a) \frac{1-x}{2(x-1)} \quad b) \frac{2a}{a^2-1}; \quad c) \frac{2a}{(a+b)^2} \quad d) \frac{13}{3a-2}$$

$$29. a) \frac{2}{4(a-b)} + \frac{1}{3(a-b)} \quad b) \frac{a(a-b)}{3(a-b)} \quad c) \frac{1}{1+3m-x}$$

$$30. a) \frac{7x}{1}; \quad b) \frac{4b}{x-a}; \quad c) -\frac{3a^2-10a-2}{2(a-1)}$$

32. Se dă expresia:

$$\frac{a + b + 1}{4} - \frac{a - b + 1}{6} - \frac{a + 5b}{12}.$$

Să se calculeze valorile ei numerice pentru diferite valori ale literelor a și b . Ce se observă? Explicație.

33. Să se calculeze: $1 - \frac{3}{4}$, $1 - \frac{4}{5}$, $1 - \frac{5}{6}$

ș.a.m.d. Să se efectueze apoi scăderea $1 - \frac{x}{x+1}$ și să se interpreteze rezultatul în legătură cu exemplele precedente.

34. Un biciclist face a km în 3 ore, iar un alt biciclist face b km în 4 ore. Cu cât este mai mare viteza primului biciclist decât viteza celui de-al doilea? Aplicație numerică: $a = 45$, $b = 48$.

35. Pentru 15 lei se cumpără a caiete, iar pentru 12 lei se cumpără b maculatoare. Cu cât este mai scump un caiet decât un maculator? Aplicație numerică: $a = 30$, $b = 40$.

36. De pe un lan de x ha s-au cules a kg de grâu, iar de pe un lan de y ha s-au cules b kg de grâu. Cu cât este mai mare producția la hectar pe primul lan decât pe al doilea?

37. Un robinet poate umple un bazin în a ore, iar alt robinet -- în b ore. Ce fracție din bazin se umple într-o oră, dacă deschidem ambele robinete? Întrebare analogă în cazul când sînt trei robinete. Aplicație numerică: $a = 4$, $b = 6$; $a = 8$, $b = 10$.

38. Un bazin are două robinete. Primul robinet poate să umple bazinul în a ore, iar al doilea

* Rezultatul se va afla direct și apoi pe baza formulei obținute.

$$34. \frac{4a - 3b}{12}, \quad 37. \frac{a + b}{ab}, \quad 38. \frac{b + a}{ab}.$$

el poate goli în b ore. Ce tracție din bazin se umple într-o oră, dacă deschidem amândouă robinetele? (Debitele robinetelor se presupun constante.) Aplicație numerică: $a = 6$, $b = 10$.

39. Se consideră trei numere oarecare, de exemplu 5, 9 și 17. Mediile aritmetice ale numerelor luate câte doua sînt: 7, 11, 13. Se constată că suma mediilor este aceeași cu suma numerelor. Să se verifice acest lucru pe alte exemple și să se demonstreze că e adevărat oricare ar fi numerele a , b , c .

40. Să se demonstreze că, dacă adunăm semisuma a două numere cu semidiferența lor, obținem primul număr; dacă scadem semidiferența din semisuma, obținem numărul al doilea. Să se dea exemple.

Înmulțirea și împărțirea fracțiilor

41. Să se efectueze:

$$a) \frac{3}{5} \cdot \frac{a}{4}; \quad b) \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3}; \quad c) \frac{2a}{3} \cdot \frac{4}{5y};$$

$$d) \frac{x^2}{2} \cdot \frac{y}{a^2}; \quad e) \frac{x}{4} \cdot \frac{6}{y}; \quad f) \frac{3}{a} \cdot \frac{2}{6};$$

$$g) \frac{a}{3} \cdot \frac{5}{a}; \quad h) \frac{a^2}{m} \cdot \frac{b}{a}; \quad i) 3 \cdot \frac{m}{6};$$

$$j) \frac{7}{a} \cdot a^2; \quad k) \frac{4x^2y}{15a^2b} \cdot 5ab; \quad l) 8xy \cdot \frac{m}{4x^2y};$$

$$m) \frac{8c^2y}{9ab^2} \cdot \frac{3a^2b}{4xy^2}; \quad n) \frac{12a^2}{7b^2c} \cdot \frac{21bc^2}{8a^3}.$$

42. Să se efectueze:

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}; \quad b) \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z};$$

$$c) \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c^2}{6};$$

$$d) \frac{10m^2}{x} - \frac{p^2}{m}; \quad e) a^2 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2};$$

$$f) \frac{10a}{x^2} + 3b^2 - \frac{5c}{10b}; \quad g) \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{c} + b^2 - \frac{b}{a^3};$$

43. Să se efectueze:

$$a) 2(x + y) + \frac{a}{x+y}; \quad b) \frac{1}{x-y} + \frac{1}{2} - \frac{a}{2};$$

$$c) \frac{a+c}{a-c} + \frac{a-c}{4}; \quad d) \frac{2a+2b}{a-c} + \frac{3}{4(a-b)};$$

$$e) \frac{5x+5a}{6} + \frac{2}{x-m}; \quad f) \frac{(a+c)^2}{6} + \frac{6}{2(a-c)};$$

$$g) \frac{m}{a} + \frac{x^2-a^2}{m}; \quad h) \frac{x+2m}{x-2m} - \frac{x^2-4m^2}{8};$$

44. Să se efectueze:

$$a) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right) + \frac{3}{2}; \quad b) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) + 2xy;$$

$$c) \left(\frac{3a}{b} - \frac{a}{a} \right) + \frac{ab}{6}; \quad d) \left(\frac{5x}{2a} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{a} \right) + 6a^2;$$

$$45. \quad a) 2a; \quad b) \frac{x+y}{2}; \quad c) \frac{a+c}{4}; \quad d) \frac{3}{2(a-c)};$$

$$e) \frac{5}{a}; \quad f) \frac{a+c}{2}; \quad g) r+s; \quad h) \frac{(x+2m)^2}{8};$$

$$46. \quad a) \frac{3a}{x} - \frac{b}{x}; \quad b) 2(3y-5z); \quad c) \frac{1}{a} - \frac{2b}{6}; \quad d) 13a^2r;$$

45. Să se facă împărțirile:

$$a) \frac{4a}{3} : \frac{5}{c}; \quad b) \frac{a}{2} : 3; \quad c) \frac{4x}{y} : 2; \quad d) a : \frac{a}{y};$$

$$e) 3x : \frac{7}{6}; \quad f) \frac{a}{b} : \frac{2a}{b}; \quad g) 2 - \frac{1}{3} - \frac{2a}{b} - 6\left(\frac{c}{y} - \frac{a}{y}\right);$$

$$h) \frac{x^2 - y^2}{3y} : \frac{x + y}{6y}.$$

46. Să se efectueze:

$$a) \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \right) : \left(\frac{1}{a} + 1 \right); \quad b) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) : 2 + y;$$

$$c) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) : \frac{1}{ab}; \quad d) \left(\frac{2a}{3b} - \frac{5a}{b} + \frac{8c}{5b} \right) : \frac{1}{b}.$$

$$17. a) \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \quad b) \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

$$48. a) \frac{1 + \frac{x-1}{2}}{\frac{x+1}{2} - 1}; \quad b) \frac{\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}}{\frac{a}{6} + \frac{b}{2}}.$$

$$15. a) \frac{y}{a}; \quad b) 2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{y}\right); \quad 16. a) 2 - \frac{3a}{6ax}; \quad b) \frac{4x^2 + 3y}{2\sqrt{xy}};$$

$$c) a^2 - b^2; \quad d) -\frac{13a}{30}.$$

$$17. a) \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - a + 1; \quad b) \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}; \quad 48. a) \frac{1}{x} - \frac{1}{1}; \quad b) \frac{1}{2}.$$

Capitolul V

ECUAȚII

67. Ce este o ecuație. *a)* Cu ajutorul algebrei se pot rezolva ușor unele probleme care se rezolvă mai greu sau nu se pot rezolva de loc pe baza cunoștințelor de aritmetică. În algebră, aceste probleme se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor. Pentru a arăta ce este o ecuație, luăm ca exemplu problema următoare:

Un muncitor depășește în fiecare zi norma cu 4 piese. În felul acesta, el face în 3 zile cât ar fi trebuit să facă în 4 zile. Câte piese trebuia să facă într-o zi?

Notăm cu x numărul care arată câte piese trebuia să facă muncitorul într-o zi. Depășind norma cu 4 piese pe zi, el face în fiecare zi $(x + 4)$ piese, iar în 3 zile el face $3(x + 4)$ piese. Dacă nu depășea norma, el făcea câte x piese pe zi, deci în 4 zile el ar fi făcut $4x$ piese. În problemă se spune că muncitorul face în 3 zile cât ar fi trebuit să facă în 4 zile, deci:

$$3(x + 4) = 4x.$$

Am obținut o ecuație. Litera x reprezintă necunoscuta. Expresia $3(x + 4)$ se numește *partea stângă* sau *membrul stâng*, iar $4x$ se numește *partea dreaptă* sau *membrul drept al ecuației*.

b) Noi trebuie să aflăm cit este x . Să încercăm $x = 10$. Înlocuind în ecuație x prin 10, membrul sting devine

$$3(x + 4) = 3(10 + 4) = 3 \cdot 14 = 42,$$

iar membrul drept devine:

$$4x = 4 \cdot 10 = 40.$$

Valoarea numerică a membrului sting nu este egală cu valoarea numerică a membrului drept. Valoarea $x = 10$ nu corespunde, se spune că ea *nu satisface* ecuația, ea nu este o *soluție* sau o *rădăcină* a ecuației.

Pentru $x = 12$, membrul sting devine

$$3(x + 4) = 3 \cdot (12 + 4) = 3 \cdot 16 = 48,$$

iar membrul drept devine:

$$4x = 4 \cdot 12 = 48.$$

Pentru $x = 12$, cele două părți ale ecuației capătă aceeași valoare numerică. $x = 12$ *satisface* ecuația; $x = 12$ este o *soluție* sau o *rădăcină* a ecuației.

A *rezolva* o ecuație înseamnă a găsi rădăcina ei (sau rădăcinile ei, dacă sînt mai multe).

E x e m p l e. Dam mai jos cîteva exemple de ecuații și, în dreptul fiecărei ecuații, rădăcina (rădăcinile) ei.

$$a) \quad 3x - 1 = 2x + 7; \quad x = 8.$$

$$b) \quad \frac{x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x-1} - 7; \quad x = 6.$$

$$c) \quad x^2 + 10 = 7x; \quad x = 2 \text{ și } x = 5.$$

$$d) \quad x^3 - 7x + 6 = 0; \quad x = 1, x = 2 \text{ și } x = -3.$$

Fiecare dintre aceste ecuații conține câte o singură necunoscută, care se notează de obicei cu x . În exemplul *a*) necunoscuta figurează numai la puterea întâi; aceasta înseamnă că este de gradul întâi. Exemplul *c*) conține x^2 și nu conține nici o putere a necunoscutelor mai mare ca doi. Această ecuație este de gradul doi. Ecuația din exemplul *d*) este de gradul trei.

În acest capitol ne vom ocupa numai de ecuații de gradul întâi cu o necunoscută.

68. **Proprietăți ale ecuațiilor.** Problema principală care se pune în legătură cu ecuațiile este problema rezolvării lor. Pentru a putea explica regulile necesare, trebuie să stabilim întâi unele proprietăți ale ecuațiilor.

Considerăm de exemplu ecuația,

$$4x + 20 = 300,$$

a carei raclaema este $x = 70$.

Să presupunem că x reprezintă greutatea unui obiect, de exemplu a unei bucati de ciocolata, exprimată în grame. Atunci ecuația ne spune că 4 bucati de ciocolata și încă 20 g cântărește împreună



Fig. 15

300 g. Cu alte cuvinte, dacă punem pe un taler al unei balanțe 4 bucati de ciocolata și o greutate de 20 g, iar pe celălalt taler o greutate de 300 g, balanța este în echilibru (fig. 15).

1) Dacă adăugăm pe fiecare taler o aceeași greutate, de exemplu 10 g, balanța rămâne în echilibru. Dacă adăugăm la fiecare pe un taler

cu $x = 10$ și $4x + 30 = 70$ și pe celălalt cu $100 - 10 = 90$ și $4x + 30 = 70$ și de aceea va fi:

$$4x + 30 = 70.$$

Această ecuație se obține din prima, adică o dată în ambii membri numărul 10. Deaiața a doua are aceeași soluție cu prima.

$$Prima: 4x + 30 = 70 \quad 4x + 30 = 70 \quad 4x + 30 = 70$$

Prin urmare, dacă adăugăm la ambii membri ai unei ecuații același număr, obținem o ecuație care are aceeași soluție cu ecuația dată. Se spune că, într-o ecuație, *ecuație* se adaugă la ambii membri același număr.

2) Căutăm o cântăreala dacă luăm de pe ambele talere câte 10 gr. de exemplu câte 10 gr. Balanța rămâne la echilibru. Atunci rămâne pe un taler $300 - 10 = 290$ gr. și pe celălalt taler $300 - 10 = 290$ gr. Ecuația va fi:

$$4x + 10 = 290.$$

Această ecuație se obține din prima, adică o dată în ambii membri numărul 10.

$$Prima: 4x + 30 = 70 \quad 4x + 30 = 70 \quad 4x + 30 = 70$$

Deci, mai o ecuație, acum vom scădea din ambii membri același număr.

3) Dacă punem pe un taler de 2 ori, de 3 ori sau de 10 ori mai multe de ori mai multe bucăți de ciocolată și tot de altele ori mai multe bucăți, și de câte 20 gr. iar pe celălalt taler tot de câte ori mai multe bucăți de câte 300 gr. balanța rămâne în echilibru. Să luăm cazul când înmulțim cu 7. Atunci vom avea pe primul taler $4x + 30 = 70$ grame iar pe talerul al doilea, $300 \cdot 7 = 2100$ gr.

Ecuatia va fi:

$$5(4x + 20) = 1\,500.$$

Aceasta ecuație va avea tot soluția $x = 70$.

Proba: $5(4x + 20) = 5(4 \cdot 70 + 20) = 5(280 + 20) = 5 \cdot 300 = 1\,500; 1\,500 = 1\,500.$

Deci, într-o ecuație *avem voie* să înmulțim ambii membri cu același număr diferit de zero.

4) Dacă micșorăm de un număr oarecare de ori, de exemplu de 5 ori, ceea ce se găsește pe fiecare taler al balanței, balanța rămâne în echilibru. Atunci ecuația va fi:

$$\frac{4x + 20}{5} = 60.$$

Această ecuație are aceeași soluție ca prima, $x = 70$.

Proba: $\frac{4x + 20}{5} = \frac{4 \cdot 70 + 20}{5} = \frac{300}{5} = 60; 60 = 60.$

Așadar, într-o ecuație *avem voie* să împărțim ambii membri prin același număr diferit de zero.

Într-o ecuație avem voie:

- 1) să adăugăm la ambii membri același număr;
- 2) să scădem din ambii membri același număr;
- 3) să înmulțim ambii membri cu același număr diferit de zero;
- 4) să împărțim ambii membri prin același număr diferit de zero.

Ecuatia ce se obține are aceeași soluție cu ecuația de la început.

69. Trecerea termenilor dintr-un membru în celălalt. Pe baza proprietăților de mai sus putem trece termenii dintr-un membru al unei ecuații în celălalt.

1) Considerăm, de exemplu, ecuația:

$$5x - 8 = 4x + 4;$$

scădem din ambii membri $4x$: obținem:

$$5x - 8 - 4x = 4.$$

Observăm că termenul $4x$ a dispărut din membrul drept, iar în membrul stâng a apărut termenul $4x$, adică același termen, dar cu semnul schimbat. Se spune că *am trecut* termenul $4x$ în membrul stâng.

2) Am obținut ecuația:

$$x - 8 = 4.$$

Adăugăm la ambii membri 8 , obținem:

$$x = 4 + 8.$$

Termenul 8 a dispărut din membrul stâng, în schimb a apărut în membrul drept termenul $+8$, adică același termen, dar cu semnul schimbat. Se spune că *am trecut* termenul -8 în membrul drept.

Într-o ecuație putem trece orice termen dintr-un membru în celălalt, schimbându-i semnul. Ecuația care se obține are aceeași soluție cu cea dată.

În practică, această regulă se folosește pentru a aduce o ecuație sub formă mai simplă. Se trec toți termenii care conțin necunoscuta în membrul stâng și toți termenii cunoscuți în membrul drept.

În exemplul considerat, aceste transformări au fost suficiente pentru a rezolva ecuația. În alte cazuri mai sînt necesare și alte transformări.

70. **Exemple. 1** Ecuația

$$2x + 3 = 5x - 12.$$

a) Treceam termenul $5x$ în membrul stâng și reducem termenii asemenea:

$$2x + 3 - 5x = -12;$$

$$-3x + 3 = -12.$$

b) Treceam termenul $+3$ din membrul stâng în membrul drept și reducem doi termeni asemenea:

$$3x = -12 - 3; \quad -3x = -15.$$

c) Împărțim ambele membre cu -3 și simplificăm:

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-15}{-3}, \quad | : (-3).$$

Am rezolvat ecuația. Rădăcina este $x = 5$.

2. Fie ecuația:

$$3(x - 1) - 12 = 6 - 4(x - 2).$$

a) Desfacem parantezele:

$$3x - 3 - 12 = 6 - 4x + 8.$$

b) Reducem termenii asemenea:

$$3x - 15 = -4x + 14.$$

c) Treceam termenul $-4x$ în membrul stâng

$$7x - 15 = 14.$$

d) Treceam termenul -15 în membrul drept

$$7x = 29.$$

2) Împărțim ambii membri cu numărul rășii prin 7:

$$x = \frac{29}{7} = 4 \frac{1}{7}.$$

Pentru a verifica rezolvata, înlocuim în ecuație:

$$x = 4 \frac{1}{7}.$$

3. Fie ecuația:

$$\frac{x-1}{6} - \frac{2x+1}{5} = 1 - \frac{7x-19}{10}.$$

Trebuie, mai întâi, să scăpăm de numitori.
Pentru aceasta:

a) Înmulțim ambii membri cu c.m.m.m.c. al numitorilor, care este 30 (și facem simplificările).

$$6(x-1) - 6(2x+1) = 30 - 3(7x-19).$$

b) Desfacem parantezele:

$$6x - 6 - 12x - 6 = 30 - 21x + 57.$$

c) Reducem termenii asemenea:

$$-7x - 11 = -21x + 87.$$

d) Trebuie să adăugăm membrul stâng:

$$14x - 11 = 87.$$

e) Trebuie să adăugăm membrul drept:

$$14x = 98.$$

f) Împărțim ambii membri prin 14:

$$x = 7.$$

Ecuația este rezolvată.

Unele lucrări se pot contopi. De exemplu, după ce am ajuns la ecuația:

$$5x - 5 - 12x - 6 = 30 - 21x + 57,$$

putem proceda astfel: subliniem toți termenii care conțin necunoscuta și reducem termenii asemenea, luând termenii din membrul celalalt, cu semnul schimbat: $5x - 12x = -7x \dots - 21x = -14x$. Apoi: $-5 - 6 = -11 \dots$, trecut în membrul al doilea, da $-11 \dots = 30 - 41 \dots = 57 = 98$. Se obține astfel de-a dreptul ecuația $14x = 98$.

71. Schema generală de rezolvare a ecuațiilor de gradul I cu o necunoscută. În exemplele precedente, după o serie de transformări am obținut ecuațiile $7x = 29$, respectiv $14x = 98$, adică niște ecuații în care membrul stâng este un monom de gradul I, iar membrul drept este un număr cunoscut. Asemenea ecuații se numesc *ecuații de gradul I cu o necunoscută*.

Pentru a rezolva o ecuație de gradul I cu o necunoscută procedăm astfel:

a) Eliminăm numitorii (înmulțim ambii membri cu c.m.m.m.c. al numitorilor).

b) Desfacem parantezele.

c) Trecem termenii necunoscuți în membrul întâi, iar cei cunoscuți în membrul al doilea și reducem termenii asemenea.

d) Împărțim ambii membri prin coeficientul lui x .

Întrucât, aceste transformări se fac numai cînd este cazul, în unele cazuri, este mai bine să procedăm altfel. De exemplu, în cazul ecuației:

$$2(x - 1) = 10,$$

este mai bine să nu desfacem parantezele. Împărțim ambii membri ai ecuației prin 2:

$$x - 1 = 5, \text{ de unde: } x = 6.$$

72. Ecuații care conțin necunoscuta la numitor. Considerăm ecuația:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{x-2} = \frac{2}{3}.$$

Când $x = 2$, numitorul fracției a doua devine zero și fracția își pierde sensul. Trebuie deci să presupunem că $x \neq 2$. C.m.m.m.c. al numitorilor este $6(x - 2)$.

Trebuie să înmulțim ambii membri ai ecuației cu aceasta expresie. Obținem:

$$\begin{aligned} x - 2 + 6 &= 4(x - 2); \quad x + 4 = 4x - 8; \\ -3x &= -12; \quad x = 4. \end{aligned}$$

Deoarece valoarea pe care am obținut-o pentru x este diferită de valoarea exclusă, $x = 2$, ea este soluția ecuației.

73. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor. Să arătăm cum putem folosi ecuațiile pentru a rezolva problema:

1) Pentru 11 m pinza s-a plătit 132 de lei, după ce s-a ieștit cu 1,50 lei la metru. Care a fost prețul unui metru de pinza înainte de ieștire?

Rezolvare. Notăm cu x numărul care arată (în lei) prețul unui metru de pinză.

Prețul întreg al unui metru... x

Prețul redus al unui metru... $x - 1,50$

Prețul redus a 11 metri..... $11(x - 1,50)$.

Problema spune ca s-a platit pentru 11 m de pinza 132 de lei. Ecuația problemei este:

$$11(x - 1,50) = 132.$$

Rezolvind ecuația, obținem: $x = 13,50$.

Răspuns. Prețul unui metru de pinza a fost 13,50 lei.

Proba. Prețul redus al unui metru de pinză este: $13,50 - 1,50 = 12$ lei; 11 m de pinza costă $12 \cdot 11 = 132$ de lei, așa cum se dă în problemă.

2) Avem două vase cu apă A și B. Apa din vasul A are 85° și se răcește cu $1,5^\circ$ pe minut. Apa din vasul B are 19° și se încălzește cu 4° pe minut.

După cât timp va avea apa din cele doua vase aceeași temperatură?

Notăm cu x numărul care arată după câte minute temperaturile se vor egala.

În x minute, temperatura apei din A
scade cu $1,5x$

Temperatura apei din A după
 x minute $85 - 1,5x$

În x minute, temperatura apei din B
crește cu $4x$

Temperatura apei din B după
 x minute $19 + 4x$

Ecuația problemei este:

$$85 - 1,5x = 19 + 4x.$$

Soluția ei este $x = 12$.

Răspuns. Temperaturile se egalează după 12 minute.

Proba. Apa din primul vas s-a răcit cu $1,5 \cdot 12 = 18^\circ$ și are acum $85 - 18^\circ = 67^\circ$; apa din vasul al doilea s-a încălzit cu $4 \cdot 12 = 48^\circ$ și are acum $19 + 48 = 67^\circ$. Cele două temperaturi sînt egale.

3) Distanța dintre două orașe A și B este de 40 km. Din A pleacă în același timp spre B un biciclist și un motociclist. Viteza motociclistului este de 4 ori mai mare decât viteza biciclistului și motociclistul ajunge în B cu 2 ore înaintea biciclistului. Care este viteza biciclistului?

Notăm cu x viteza biciclistului, exprimată în kilometri pe oră (biciclistul face x km pe oră). Viteza motociclistului (kilometri pe oră)... $4x$.

Timpul în care biciclistul parcurge drumul de la A la B ... $\frac{40}{x}$.

Timpul în care motociclistul parcurge drumul de la A la B ,... $\frac{40}{4x} = \frac{10}{x}$.

Se dă că motociclistul ajunge cu două ore înaintea biciclistului, adică timpul cît merge motociclistul este cu două ore mai scurt decât timpul cît merge biciclistul. Dacă din $\frac{40}{x}$ scădem 2,

trebuie să obținem $\frac{40}{x} - 2 = \frac{10}{x}$.

Aceasta este ecuația problemei. Rezolvînd-o, obținem: $x = 15$.

Răspuns. Viteza biciclistului este de 15 km pe oră.

Proba. Biciclistul parcurge distanța AB în $40 : 15 = 2\frac{2}{3}$ ore, viteza motociclistului este de $15 \cdot 4 = 60$ km

pe oră, el parcurge această distanță în $40 : 60 = \frac{2}{3}$ ore.

$2\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 2$ ore, așa cum se dă în problemă.

4) O mână urmu sa machine, conform planului, 50 de vagoane gita pe luna. În prima luna, ca

depășește planul cu un anumit procent iar în luna următoare, numărul care arată cu câte procente moara depășește planul este cu 4 mai mare. În aceste două luni, moara macină 10 vagoane de grâu peste plan. Cu cât la sută a depășit planul moara în prima lună?

Rezolvare. Notăm cu x numărul care arată cu cât la sută a depășit moara planul în prima lună. În luna a doua, planul a fost depășit cu $\dots (x + 4)\%$.

Cantitatea de grâu măcinat peste plan în prima lună... $\frac{x}{100} \cdot 50 = \frac{x}{2}$.

Cantitatea de grâu măcinat peste plan în luna a doua... $\frac{x + 4}{100} \cdot 50 = \frac{x + 4}{2}$.

Cantitatea totală de grâu măcinat peste plan...

$$\frac{x}{2} + \frac{x + 4}{2}.$$

În problema se dă că această cantitate este de 10 vagoane. Ecuația problemei este:

$$\frac{x}{2} + \frac{x + 4}{2} = 10.$$

Soluția ei este: $x = 8$.

Răspuns. În prima lună, moara a depășit planul cu 8%.

Proba. În luna a doua, moara a depășit planul cu $8 + 4 = 12\%$. În prima lună s-au măcinat peste plan: $\frac{50 \cdot 8}{100} = 4$ vagoane; în luna a doua: $\frac{50 \cdot 12}{100} = 6$ vagoane;

în ambele luni $4 + 6 = 10$ vagoane, așa cum se dă în problemă.

74. Interpretarea soluțiilor negative. Când rezolvăm o problemă cu ajutorul unei ecuații și obținem o soluție negativă se pot întâmpla două cazuri. Dacă mărimea pe care o reprezintă necu-

noscuta nu poate lua valori negative, înseamnă că problema este imposibilă. Dacă însă mărimea poate lua valori negative, soluția negativă are un înțeles.

E x e m p l e. *a) Într-o școală sînt 180 de băieți și un număr de fete. S-au cumpărat bilete de cinema pentru toată școala. Un bilet costa 2,50 lei și s-au cheltuit în total 400 de lei. Cîte fete sînt în școală?*

Notăm cu x numărul fetelor.

Numărul biletelor cumparate... $x + 180$.

Valoarea biletelor (în lei)... $2,50 (x + 180)$.

Se dă că această valoare este de 400 de lei.

Deci:

$$2,50 (x + 180) = 400.$$

Rezolvînd ecuația găsim: $x = -20$.

Numărul fetelor din școală nu poate fi negativ. Această problemă este imposibilă.

Acest lucru se putea observa de la început. Cele 180 de bilete pentru băieți costă $2,50 \cdot 180$

450 de lei. Este imposibil ca din 400 de lei să se cumpere bilete pentru toată școala.

b) Punem acum o problemă asemănătoare.

Într-o școală sînt 180 de elevi. Un bilet de cinema costă 2,50 lei și școala a cumparat bilete de 100 de lei. Cîți copii mai pot fi invitați să meargă la cinema cu aceste bilete?

Notăm cu x numărul copiilor invitați.

Numărul biletelor necesare... $x + 180$.

Costul biletelor este (în lei)... $2,50(x + 180)$.

Ecuația problemei este aceeași ca mai înainte, deci soluția este tot: $x = -20$.

Acum soluția poate fi interpretată. Trebuie să mai vină 20 de copii. Aceasta înseamnă că

trebuie să plece 20 de copii, adică 20 de elevi ai școlii rămân fără bilete.

75. **Încheiere.** Rezolvarea unei probleme cu ajutorul ecuațiilor se compune din următoarele părți: *a)* punerea problemei în ecuație; *b)* rezolvarea ecuației; *c)* formularea răspunsului la problemă; *d)* proba.

Proba se face pe baza conținutului problemei, nu introducând valoarea lui x în ecuație, din motivele următoare: în primul rând, trebuie văzut dacă soluția poate fi acceptată. De exemplu, dacă x reprezintă un număr de oameni și obținem pentru x o valoare fracționară, problema este imposibilă, deși ecuația are o soluție. În al doilea rând, dacă am greșit numai la punerea problemei în ecuație, valoarea aflată pentru necunoscuta satisface ecuația, deși nu corespunde problemei.

Când soluția este negativă, trebuie căutată interpretarea ei.

EXERCITII

Să se rezolve ecuațiile următoare:

1. *a)* $3x - 1 = 14$; *b)* $2x + 15 = 3$.
2. *a)* $8 = 3x - 1$; *b)* $2x = 7x - 6$.
3. *a)* $6 = x - 0,3$; *b)* $0 = 3x - 8,7$.
4. *a)* $7x = 1 - 5x$; *b)* $1 - 2x = 2x - 1$.
5. *a)* $3 - 2x = x - 15$; *b)* $0,9 = 0,5 - 2x$.
6. *a)* $3 - 1,6x = 8 + 1,4x$;
 b) $1,4 + 1,5x = 1,6 + 1,7x$.

6. *a)* $-1\frac{2}{3}$; *b)* -1 .

$$7. a) 3\frac{1}{5} + x = 2,8 - x;$$

$$b) 1\frac{5}{8} - 3x = 3\frac{3}{4} - 2x.$$

$$8. a) 2x - 5\frac{1}{4} = 3x - 2\frac{1}{4};$$

$$b) 5\frac{2}{3} - 2x = 3\frac{1}{6} - 3x.$$

$$9. 3(x - 1) - 2(x + 2) = -4.$$

$$10. 2x - 3 = 2(x - 2) - 10 = 3(x - 1).$$

$$11. 5(x - 2) - 2(x - 3) = 6(x - 1) - 3.$$

$$12. 0,62x - 2(0,6 - 0,04x) = 0,2(0,5x - 2).$$

$$13. (x - 1)(x - 2) = (x - 3)(x - 3) \\ = (x + 1)(x + 2) + (x + 3)^2.$$

$$14. (2x - 1)^2 = (x - 2)^2 = (3x - 1)^2 = \\ = (x - 3)^2 = 5x^2 - 7.$$

$$15. 3(x - 1)(x - 2) = (2x - 1)^2 = \\ = (2x + 3)(2x - 3) = 4(5x + 2).$$

$$16. a) \frac{x}{3} - 1 = \frac{x}{5}; \quad b) \frac{2x}{5} + \frac{3x}{10} = 7.$$

$$17. a) 1 - 2x = \frac{x}{3} - 1; \quad b) \frac{1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{3} - \frac{x}{2}.$$

$$7. a) -0,2; \quad b) -\frac{17}{40}; \quad 8. a) -7\frac{1}{2}; \quad b) -2\frac{1}{2}.$$

$$9. 3; \quad 10. 4; \quad 11. 1\frac{1}{2}; \quad 12. \text{E na\c{u}a se \c{u}nmulteste \c{u}n prea-$$

$$\text{tabel cu } 100; \quad x = 8; \quad 13. -2\frac{1}{4}; \quad 14. 1; \quad 15. -2.$$

$$18. a) \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} + 1; b) 1 - \frac{x}{2} = \frac{5x}{6} - 1.$$

$$19. a) \frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{5x}{6};$$

$$b) x - \frac{2x}{3} = 2x - 1 - \frac{x}{6}.$$

$$20. a) 1 - \frac{2x}{3} = 1 - x - \frac{x}{2} + 1;$$

$$b) \frac{3x}{8} + 1 - \frac{x}{4} = 5 - 1.$$

$$21. \frac{x}{2} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+6}{8} = \frac{3x}{4} - 2 - \frac{5x-2}{8}.$$

$$22. \frac{x}{4} + 1 - \frac{x}{6} = \frac{x-3}{6} + \frac{x+7}{2}.$$

$$23. \frac{4x}{3} + 1 - \frac{4}{4} + 1 - \frac{x}{6} + \frac{3x}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$24. \frac{7x}{25} + 1 - \frac{x}{20} = \frac{4}{10} - \frac{x}{10} + \frac{x}{5}.$$

$$25. \frac{3(x-1)}{4} = \frac{2(x+1)}{3} = \frac{x+1}{2} = \frac{11}{4}.$$

$$26. \frac{7x}{3} - 2 = \frac{4}{3}(x-3) - 6 = \frac{x-2}{2}.$$

$$27. \frac{3(x-1)}{2} = \left(\frac{x-1}{6} - 3 \right) - \frac{5x-2}{3} + \left(\frac{x-1}{2} - 3 \right).$$

$$28. \frac{x}{2} + 1 = \left(1 - \frac{x}{2} + 1 \right) - \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4} + 1 - 1 \right).$$

$$18. a) 8 \frac{4}{7}; b) 1 \frac{1}{2}. 21. 4. 22. 3. 23. 4. 24. 3.$$

$$25. 2. 26. 2. 27. 5. 28. 1 \frac{2}{3}.$$

$$29. \frac{(2x+1)^2}{4} - \frac{(1x-1)^2}{9} - \frac{15x-10}{18}.$$

$$30. \frac{(x+2)(x-2)}{2} + \frac{(2x-1)(x-2)}{4} - (x-1)^2 - 3x - 5.$$

$$31. a) \frac{x-1}{x+1} = \frac{3}{5}; \quad b) \frac{x-2}{x+2} = \frac{5}{7}.$$

$$32. a) \frac{x-1}{x+2} = \frac{x-1}{x+2}; \quad b) \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2x-1}{x+2}.$$

$$33. a) \frac{x-1}{x+2} = \frac{x}{x+3}; \quad b) \frac{x-1}{2x+4} = \frac{2}{3x-6} = \frac{1}{6}.$$

$$34. a) \frac{2x-1}{3x+2} = \frac{3x-1}{6x+4} = \frac{1}{2};$$

$$b) \frac{x-1}{2x+2} = \frac{1}{3} = \frac{2x-3}{3x+3}.$$

$$35. \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{6x+3} + \frac{1}{4x+2} = \frac{11}{18}.$$

$$36. \frac{4x-3}{2x+6} = \frac{3}{4x+12} = \frac{x-1}{x+3} = 1.$$

$$37. \frac{x+1}{8x+12} = \frac{2x+1}{4x+6} = \frac{3x+1}{2x+3} = \frac{4x+23}{12x+18}.$$

$$29. \frac{1}{2} \quad 30. \frac{1}{12} \quad 31. a) 4; b) 5. \quad 32. a) 0; b) \frac{1}{2} \quad 33. a) \frac{3}{2}$$

$$b) \frac{1}{2} \quad 34. a) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; b) 1 \quad 35. 2 \quad 36. 1 = \frac{1}{8} \quad 37. 1.$$

$$38. a) \frac{3}{4x-8} - \frac{1}{2x-4} = \frac{x+5}{x^2-4};$$

$$b) \frac{4}{3x-3} - \frac{2x-11}{(x-1)^2} = \frac{3}{2x-2}.$$

$$39. a) \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2x-4} = \frac{2x-1}{(x-2)^2};$$

$$b) \frac{3}{2(x-a)} - \frac{1}{4(x-a)} = \frac{x}{x-a^2}.$$

Probleme

1. Să se afle un număr, știind că: *a)* dublul lui, marit cu 1, este egal cu triplul lui, micșorat cu 7; *b)* dublul lui, micșorat cu 1, este egal cu triplul lui, mărit cu 5; *c)* dublul lui marit cu 3 este egal cu triplul lui.

2. Scad un anumit număr din 583, apoi adaug același număr la 117 și obțin același rezultat. Care este numărul?

3. Mă gândesc la un număr. Îi adaug 1, înmulțesc rezultatul cu 2, adaug 3, înmulțesc rezultatul cu 4 și adaug 5. Rezultatul este 65. La ce număr m-am gândit?

4. Să se afle numărul care, dacă-l înmulțim cu 7, crește cu 168.

5. Să se afle numărul care, dacă-l împărțim prin 7, scade cu 522.

38. *a)* 10; *b)* 3; 39. *a)* 6; *b)* 7; *c)* 1. 40. *a)* 8; *b)* 6; *c)* 3.
2. 218. 3. 5.

6. Diferența dintre dublul unui număr și jumătatea lui este 292. Să se afle numărul.

7. Mă gîndesc la un număr. Îi adaug 1 și împart rezultatul prin 2, apoi adaug 2 și împart rezultatul prin 3, apoi adaug 3 și împart rezultatul prin 4. Rezultatul final este 1. Să se afle numărul. Cum se schimbă rezultatul dacă continuăm operația?

8. Mă gîndesc la un număr. Îl înmulțesc cu 2, adaug 1, împart suma prin 3 și obțin un rezultat, înmulțesc numărul la care m-am gîndit cu 3, scad 1, împart diferența prin 4 și obțin un nou rezultat. Cele două rezultate sînt egale. La ce număr m-am gîndit?

9. Scad dintr-un număr 7 și înmulțesc diferența cu 3; produsul este cu 5 mai mic decît dublul numărului. Să se afle numărul.

10. Măresc un număr cu 1 și înmulțesc suma cu 4, produsul obținut este cu 58 mai mare decît triplul aceluia număr. Să se afle numărul.

11. Scad dintr-un număr 2 și înmulțesc diferența cu 3, apoi scad din același număr 3 și înmulțesc diferența cu 2. Primul rezultat este cu 17 mai mare decît al doilea. Să se afle numărul.

12. *a)* Într-o clasă sînt 31 de elevi. La sfîrșitul anului situația este următoarea: sînt de 4 ori mai mulți promovați decît premiați; numărul cori-

6. $194\frac{2}{3}$; 7. 1; rezultatul rămîne mereu 1. 8. 7, 9, 16, 10, 54. 11. 17. 12. *a)* 5 premiați; *b)* imposibil.

genților este cu 3 mai mic decât al premianților, iar 3 elevi sînt repetenți. Cîți elevi sînt premianți, promovați, corigenți? *b)* Aceeași problemă dacă în clasă sînt 35 de elevi.

13. Într-un triunghi ABC , unghiul B este cu 10° mai mare ca unghiul A , iar unghiul C este dublul unghiului B . Se cer unghiurile triunghiului.

14. Orașul A are cu două mii mai mulți locuitori decât orașul B , orașul C are cu 25 mii mai mulți locuitori decât A , iar orașul D are cu 45 mii mai mulți locuitori decât C . Populația totală a acestor patru orașe este de 523 mii locuitori. Cîți locuitori are fiecare dintre aceste orașe?

15. În patru plicuri se găsesc 4 831 de lei. Plicul al doilea conține mai puțin cu 1 leu decât dublul sumei din primul plic; plicul al treilea conține cu 2 lei mai mult decât al doilea, iar plicul al patrulea — cît diferența dintre al treilea plic și primul. Cît conține fiecare plic?

16. *a)* Într-o livadă sînt 150 de pomi. Numărul merilor este cu 10 mai mare decât al perilor; numărul vișinilor este de două ori mai mare decât al merilor, iar numărul cireșilor este cu 15 mai mic decât triplul numărului merilor. Cîți pomi sînt de fiecare fel? *b)* Aceeași problemă, dacă în livadă sînt 160 de pomi.

17. În anul 1958 s-a produs în țara noastră cu 52 mii tone mai multă fontă decât în 1957:

13. $A = 37,30\%$, **14.** 113, 115, 140, 155 mii, **15.** Primul plic conține 305 lei, **16.** *a)* Sînt 15 peri; *b)* imposibil.

producția de fonta din anul 1959 a fost cu 135 mii tone mai mare decât media din cei doi ani precedenți, iar producția din 1960 a fost cu 257 mii tone mai mare decât media celor trei ani precedenți. În total, s-au produs în acești patru ani 3285 mii tone fonta. Să se afle producția de fonta din fiecare din acești ani.

18. Avem 3 cutii cu bomboane. Cutia a doua conține cu 1 kg mai mult decât prima, iar cutia a treia, cu 1 kg mai mult decât a doua. Bomboanele din prima cutie costa 22 lei kilogramul, cele din cutia a doua costa 20 lei kilogramul, iar cele din cutia a treia 18 lei kilogramul. Toate bomboanele costă 356 lei. Cât conține fiecare cutie?

19. Distanța dintre două orașe A și B este de 72 km. Din ambele orașe pornesc în același timp doi oameni și merg unul către celălalt. Unul din ei face 6 km pe oră, iar celălalt, 4 km pe oră. Să se afle: $a)$ după câte ore va fi distanța dintre ei de 37 km, înainte ca să se fi întâlnit; $b)$ după câte ore se întâlnesc?

20. Pânza s-a ieftinit cu 2 lei la metru; 6 m de pânză costă acum cât au costat înainte 5 m. Cât a costat un metru de pânză?

21. Un tren parcurge o distanță de 345 km în 7 ore. În ultimele două ore, viteza trenului este cu 5 km pe oră mai mică decât în primele 5 ore. Care a fost viteza trenului în primele 5 ore?

17. 686, 738, 847, 1014 mii tone. 18. 5 kg; 6 kg; 7 kg.
19. $a)$ $3\frac{1}{2}$ ore; $b)$ 7 ore 12 min. 20. 12 lei. 21. 45 km/oră.

22. O mașină parcurge un drum în trei etape. În prima etapă parcurge $\frac{5}{18}$ din distanță, în etapa a doua $\frac{4}{9}$ din distanță, iar în etapa a treia restul. Știind că în primele două etape a parcurs 234 km, să se afle cât a parcurs mașina în cea de-a treia etapă.

23. Într-un rezervor *A* se găsesc 120 l de benzină, iar într-un rezervor *B*, 160 l. Din *A* se consumă câte 10 l benzină pe zi, iar din *B* câte 15 l. *a)* După câte zile se vor găsi în ambele rezervoare cantități egale de benzină? *b)* După câte zile rămâne în *A* de două ori mai mult decât în *B*? *c)* După câte zile rezervorul *A* va conține $\frac{5}{7}$ din cât conține rezervorul *B*?

24. Drumul dintre două orașe *A* și *B* urca tot timpul. Un biciclist, când merge la vale, face cu 4 km pe oră mai mult decât atunci când merge la deal. El face drumul de la *A* la *B* în 4 ore, iar de la *B* la *A*, în 3 ore. Cu ce viteză merge biciclistul la deal?

25. Un pionier a parcurs cu bicicleta drumul dintre două orașe. La întrebarea cu ce viteză a mers, el răspunde: „Dacă viteza mea era cu 3 km pe oră mai mare, făceam tot drumul în 4 ore; dacă viteza era cu 3 km pe oră mai mică, făceam drumul în 6 ore”. Cu ce viteză a mers pionierul?

22. 90 km. 23. *a)* După 8 zile; *b)* după 10 zile; *c)* cu 8 zile în urmă. 24. Cu 12 km oră. 25. 15 km oră.

26. O mașina parcurge un drum de 413 km în trei etape. Prima etapă este de 2 $\frac{1}{2}$ ore și în acest timp viteza mașinii este cu 8 km pe ora mai mare decât viteza reglementară; etapa a doua este de doua ore și în acest timp viteza este cu 6 km pe ora sub viteza reglementară; etapa a treia este de 2 $\frac{1}{4}$ ore și viteza este cea reglementară. Care este viteza reglementară?

27. Distanța dintre două orașe este de 154 km. Doi bicicliști pleacă în același timp din aceste orașe și merg unul către celălalt. Viteza unuia dintre ei este cu 4 km pe ora mai mare decât a celuilalt. Ei se întâlnesc după 5 $\frac{1}{2}$ ore. Să se afle vitezele celor doi bicicliști.

28. Distanța dintre două orașe A și B este de 120 km. Doi bicicliști pleacă în același timp din aceste orașe și merg unul către celălalt cu o viteză de 12 km pe oră. Cu cât trebuie să-și mărească primul biciclist viteza, ca ei să se întâlnească: *a)* după 4 ore; *b)* după 5 ore; *c)* după 6 ore.

29. A are de 5 ori mai mulți bani decât B . Dacă B îi dă lui A un leu, atunci A are de 7 ori mai mult decât B . Câți bani are fiecare din ei?

30. A are 9 lei, iar B are 19 lei. Cât trebuie să dea A lui B , pentru ca: *a)* lui A să-i rămână $\frac{1}{3}$ din cât are B ; *b)* lui A să-i rămână $\frac{1}{4}$ din cât are B .

26. 60 km/oră, 27. 12 km/oră, 28. *a)* cu 6 km/oră; *b)* viteza rămâne neschimbată; *c)* viteza trebuie mărită cu 4 km/oră, 29. 4 lei; 20 lei, 30. *a)* 2 lei; *b)* B trebuie să dea lui A 3 lei.

31. Avem un segment de dreaptă $AB = 30$ cm (A la stînga lui B) și un punct M pe el, $AM = 13$ cm. Cu cît trebuie să mutăm punctul M spre dreapta ca să avem:

$$a) AM = 2 BM; \quad b) BM = 2 AM.$$

32. O căruța cu doi cai poate transporta cu 6 saci de grîu mai mult decît o căruța cu un singur cal. Trei caruțe cu un cal și două căruțe cu doi cai transportă în total 47 de saci cu grîu. Cîți saci transporta o caruță cu un singur cal?

✓ **33.** Să se afle un număr știind că: *a)* suma formată din stîrlul și șesimea lui este cu 3 mai mică decît jumătatea lui; *b)* dacă-i adaug 1 și împart suma la 2, cîtlul este cu 1 mai mic decît două treimi din el; *c)* dacă-i adaug 1 și împart suma prin 2, apoi scad din el 1 și împart diferența prin 3, diferența dintre primul cît și cel de-al doilea este 3.

34. Trei băieți A, B, C cumpără împreună o minge de fotbal și contribuie în părți neegale. A dă $\frac{1}{3}$ din banii săi; B are de două ori mai mulți bani decît A și dă $\frac{1}{5}$ din banii săi; C are cu 5 lei mai puțin decît A și dă $\frac{1}{4}$ din banii săi. Mingea costă 43 de lei. Cît a avut fiecare?

35. Am 35 de lei în diferite monede. Numarul hîrtilor de 1 leu este cu 2 mai mic decît al hîrtilor de 3 lei; numarul monedelor de 50 de bani

31. *a)* cu 7 cm; *b)* cu 3 cm spre stînga. **32.** 7 saci. **33.** *a)* 56; *b)* 9; *c)* 13. **34.** A are 45 lei.

este cu 1 mai mare decît al hîrtiilor de 3 lei, iar numărul monedelor de 25 de bani este egal cu numărul celorlalte monede la un lei. Cîte monede de fiecare fel am?

36. La sfîrșitul anului, situația unei clase se prezenta astfel: $\frac{2}{3}$ din elevi sînt promovați, $\frac{2}{9}$ sînt corigenți, iar 4 elevi sînt repotenți. Cîți elevi au fost în clasă?

37. O rață sălbatică zboară deasupra unui lac și vede o mulțime de rațe care se scaldă și le spune: „Buna dimineața, vouă, o sută de surmoare”. Atunci o rață de jos îi răspunde: „Nu sîntem o sută. Dar dacă am fi încă o dată pe atît și încă o jumătate și un sfert și cu tine, atunci am fi o sută”. Cîte rațe au fost pe lac?

38. Un grup de pionieri face o excursie. În prima zi ei fac $\frac{1}{4}$ din drum, în ziua a doua, $\frac{3}{8}$ din drum, iar în ziua a treia — restul, care este de 18 km. De cîți kilometri a fost tot drumul?

39. Un băiat fiind întrebat cîți pomi sînt în curtea școlii, spune: „A treia parte din numărul pomilor sînt meri, un sfert sînt peri și mai sînt 3 cași”. Cîți pomi sînt în livada?

40. Doi elevi, A și B, rezolvă problemele propuse la olimpiada. Într-o zi, A spune lui B: „Am rezolvat cu două probleme mai mult decît jumătate din toate problemele propuse”. B îi răspunde:

35. 7 hătii de cîte 3 lei. 36. 36 elevi. 37. 36 rațe. 38. 48 km. 39. Imposibil.

„Eu am rezolvat cu 3 probleme mai mult decât $\frac{1}{3}$ din tot”. De fapt, ei rezolvaseră același număr de probleme. Cite probleme erau propuse?

41. Un autoturism și un camion pornesc în același timp din orașul *A* și merg spre orașul *B*. Autoturismul face 60 km pe ora, iar camionul face 40 km pe oră și autoturismul ajunge în *B* cu o ora înaintea camionului. Se cere distanța dintre orașele *A* și *B*.

42. Apa unui râu curge cu o viteză de 3 km pe oră. O barcă merge la vale timp de 2 ore și 20 de minute, apoi se întoarce și merge la deal timp de 3 ore și 15 minute, și parcurge în total un drum de 81 km. Care este viteza proprie a bărcii?

43. Un elev pornește cu bicicleta pentru a merge din orașul *A* în orașul *B*. El merge cu o viteză de 12 km pe oră, dar la jumătatea drumului bicicleta se strică și elevul își continuă drumul pe jos, cu o viteză de 5 km pe oră. El face tot drumul în $4\frac{1}{4}$ ore. Să se afle distanța dintre cele două orașe.

44. Ce sumă a avut mama, dacă după ce a cheltuit $\frac{2}{5}$ din sumă, apoi $\frac{1}{4}$ din rest și apoi încă 16 lei, i-au mai rămas 38 lei?

45. Ce vîrstă are o persoană, știind că acum 5 ani ea avea dublul vîrstei de acum 20 de ani?

40. 6 probleme. 41. 120 km 42. 15 km/oră. 43. 30 km. 44. 360 lei. 45. 35 ani.

46. Un muncitor își rezerva o sumă de bani pentru cheltuieli neprevăzute. În cursul săptămânii, el cheltuiește jumătate din cât a avut la început și la sfârșitul săptămânii mai adaugă 10 lei. În săptămâna următoare, el cheltuiește o treime din cât a avut la începutul acelei săptămâni și la sfârșit adaugă 20 de lei. În săptămâna a treia, el cheltuiește un sfert din cât a avut la începutul acelei săptămâni și mai adaugă 5 lei. În cele din urmă, el are jumătate din cât a avut la început. Cât a avut muncitorul la început?

47. *a)* Într-un coș sînt 25 de ouă. La începutul fiecărei săptămîni se adaugă în coș același număr de ouă, și în cursul săptămîni se folosesc jumătate din ouăle care erau la începutul săptămîni. După trei săptămîni rămîn în coș 11 ouă. Cîte ouă se adaugă în fiecare săptămînă? *b)* Aceeași problemă, dacă la început sînt în coș tot 25 de ouă și după cinci săptămîni sînt 56 de ouă. *c)* Aceeași problemă, dacă la sfârșitul fiecărei săptămîni rămîn în coș mereu 25 de ouă.

48. O fabrică depășește planul cu 8% și produce într-o lună mărfuri în valoare de 378 000 de lei. Care este valoarea marfurilor pe care trebuia să le producă după plan fabrica?

49. În anul 1960 în țara noastră s-au construit din fondurile de stat cca. 27 846 de apartamente, ceea ce reprezintă o creștere de 19% față de anul 1959. Cîte apartamente s-au construit în 1959?

16. 100 lei. 47. *a)* 9 ouă; *b)* 57 ouă; *c)* 25 ouă.
48. 350 000 lei. 49. 23 400.

50. Grîul conține 3% corpuri străine. Din cît grîu necurațat se obțin 1 455 kg de grîu curățat (care nu mai conține deloc corpuri străine)?

51. În urma unei reduceri de prețuri, bomboanele s-au ieftinit cu 14%. Cît a costat înainte de ieftinire un kilogram de bomboane care costă acum 15,48 lei?

52. Săpunul pierde prin uscarea 12% din greutate. Ce cantitate de sapun proaspăt s-a cumpărat, dacă după uscarea au rămas 30.800 kg de săpun?

53. La o fabrică de amidon se prelucurează două feluri de cartofi. Al doilea fel de cartofi conține cu 5% mai mult amidon ca primul. Din 10 vagoane cartofi de primul fel și 8 vagoane de felul al doilea s-au scos 3,1 vagoane amidon. Cît la sută amidon conține primul fel de cartofi?

54. Numitorul unei fracții este cu 14 mai mare decît numărătorul. Dacă mărim numărătorul ei cu 1 și micșorăm numitorul tot cu 1, obținem o fracție egală cu $\frac{1}{2}$. Să se afle fracția.

55. Numitorul unei fracții este cu 3 mai mare decît numărătorul. Dacă mărim ambii termeni cu 2, fracția devine egală cu $\frac{3}{4}$. Să se afle fracția.

56. Considerăm fracția $\frac{7}{11}$. Adăugînd la numărătorul ei un anumit număr și scăzînd același

50. 1 500 kg. **51.** 18 lei. **52.** 35 kg. **53.** 15%. **54.** $\frac{11}{25}$.

55. $\frac{7}{10}$.

număr din numitorul ei, obținem fracția inversă, $\frac{11}{7}$. Să se afle numărul. Generalizare pentru cazul fracției $\frac{a}{b}$ unde $a < b$. Să se examineze și cazul când $a > b$. Ce se întâmplă când $a = b$?

57. Se dă fracția $\frac{7}{15}$. a) Cu cât trebuie să-i mărim ambii termeni ca să obținem o fracție egală cu $\frac{1}{2}$? b) Cu cât trebuie să micșorăm ambii termeni ca să obținem o fracție egală cu $\frac{1}{5}$? c) Dacă micșorăm numărătorul cu un număr și mărim numitorul cu triplul aceluși număr, obținem o fracție egală cu $\frac{1}{3}$. Să se afle numărul.

58. Doi muncitori au avut salarii egale. În urma ridicării calificării, salariul unuia dintre ei s-a mărit cu 400 lei, iar al celuilalt, cu 200 lei și ca urmare a acestui fapt, salariul primului reprezintă 90% din salariul celui de-al doilea. Ce salariu au avut acești muncitori?

59. Avem un amestec format din 30 l de alcool de 40° și 20 l de apă. a) Cât alcool curat (de 100°) trebuie să adăugăm pentru a avea spirt de 80°? b) Dar pentru a avea spirt de 50°?

60. Avem 200 g de soluție cu concentrația de 20% (20% din greutatea totală este sare, iar restul este apă). a) Câtă apă trebuie să-i adăugăm ca

56. 4; b) a ; c) $a - b$. 57. a) cu 1; b) cu 5; c) numărul este 1. 58. 800 lei. 59. a) 50 litri, b) imposibil.

să obținem o concentrație de 5%? *b)* Câtă sare trebuie să-i adăugăm ca să obținem o concentrație de 25%?

61. O soluție conține 30% acid sulfuric. Cât acid sulfuric curat trebuie să adăugăm la 100 cm³ din această soluție pentru a avea o soluție de 50%?

62. Un aliaj de aur și cupru are titlul de 0,600 și cântărește 15 g. Cât aur curat trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de 0,750? (Titlul unui aliaj este raportul dintre greutatea metelului fin și greutatea totală.)

63. Un aliaj de aur și cupru are titlul de 0,800 și cântărește 30 g. Cât cupru trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de 0,600?

64. Avem un aliaj format din 16 g aur și 20 g cupru. Cât aur curat trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de: *a)* 0,900; *b)* 0,400?

65. Brațele unei pîrghii de genul întîi sînt: $OA = 70$ cm; $OB = 40$ cm. În punctul *A* atîrnăm o caramidă, iar în *B* două caramizi. Dacă adăugăm la caramida din *A* o greutate de 500 g, pîrghia este în echilibru. Ce greutate are o caramida?

66. Brațele unei pîrghii de genul întîi sînt: $OA = 50$ cm; $OB = 30$ cm. În *A* este atîrnată o anumită greutate. Ca pîrghia să fie în echilibru, trebuie ca greutatea atîrnată în *B* să fie cu 10 kg mai mare. Ce greutate este atîrnată în *A*?

60. *a)* 600 g; *b)* $13\frac{1}{3}$ g. 61. 50 cm³. 62. 9 g. 63. 10 g.

64. *a)* 164 g, *b)* imposibil (u trebuie să se scoată $2\frac{2}{3}$ g aur)

65. 3,5 kg. 66. 15 kg.

67. Brațele unei pîrghii de gerul întii sînt: $OA = 30$ cm, $OB = 80$ cm. În capatul A se aplica o forță de 3 kg, iar în B , de 2 kg. Cu cît și în ce sens trebuie să mutăm punctul de sprijin ca pîrghia să fie în echilibru?

68. Brațele unei pîrghii sînt: $OA = 30$ cm, $OB = 70$ cm. În A este aplicată o forță de 12 kg, iar în B de 8 kg. Vrem să scurtăm ambele brațe cu aceeași lungime, astfel ca pîrghia să fie în echilibru. Să se calculeze această lungime.

69. Brațele unei pîrghii sînt: $OA = 16$ cm, $OB = 64$ cm. În A este aplicată o forță de 15 kg, iar în B de 5 kg. Vrem să scurtăm brațul OA cu o lungime și să lungim OB cu aceeași lungime, astfel ca pîrghia să fie în echilibru. Care este această lungime?

70. Laturile unui triunghi sînt: $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 6$ cm. Printr-un punct M de pe latura AB se duce o paralela la BC și se notează cu N punctul ei de intersecție cu AC . Să se determine distanța AM astfel ca: *a)* segmentul MN să fie egal cu MB ; *b)* segmentul MN să fie egal cu NC .

71. Laturile unui triunghi sînt: $AB = 6$ cm; $BC = 5$ cm; $CA = 7$ cm. Printr-un punct M al laturii AB se duce o paralela la BC și se notează cu N punctul ei de intersecție cu AC . Să se determine distanța $AM = x$, astfel ca perimetrul trapezului $BMNC$ să fie de 15 cm.

67. Cu 14 cm spre B . 68. Brațele trebuie luate cu 50 cm. 69. OA trebuie lungit, OB trebuie scurtat cu 4 cm.
70. *a)* $1\frac{7}{9}$ cm; *b)* $2\frac{2}{11}$ cm. 71. 2,25 cm.

72. Notățiile fiind cele din problemele precedente, se da: $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $CA = 9$ cm. Să se determine AM astfel încît: *a)* Perimetrul trapezului $BCNM$ să fie egal cu perimetrul triunghiului AMN ; *b)* perimetrul triunghiului ABC să fie dublul perimetrului triunghiului AMN ;

73. Laturile unui triunghi sînt: $AB = 6$ cm; $BC = 7$ cm; $CA = 9$ cm. Notăm cu D mijlocul laturii AB . Tot pe latura AB se ia un punct M , se duce prin el o paralelă la BC și se notează cu N punctul de intersecție cu AC . Să se determine segmentul $DM = x$, astfel încît perimetrul trapezului $BMNC$ să fie de: *a)* 20 cm; *b)* 17,2 cm; *c)* 18 cm; *d)* 22 cm; *e)* 14 cm.

74. Un triunghi are însușirile următoare: baza sa este cu 7 cm mai mare decît înălțimea; dacă-i micșoram baza cu 2 cm și mărim înălțimea cu 1 cm, aria sa rămîne neschimbată. Se cere înălțimea triunghiului.

75. Avem doua segmente, dintre care unul este cu 5 cm mai mare decît celălalt. Dacă marim segmentul mai mic cu 2 cm și micșoram segmentul mai mare cu 3 cm, media lor proporțională rămîne neschimbată. Să se afle lungimile celor doua segmente.

76. Într-un triunghi dreptunghic ABC , se notează cu D piciorul înălțimii coborîte din vîrfurile unghiului drept A pe ipotenuza. Se știe că BC este cu 3 cm mai mare ca BD , iar AD este cu

72. *a)* $3\frac{1}{4}$ cm; *b)* $2\frac{1}{2}$ cm. **73.** *a)* $DM = 1,5$ cm, M între A și D ; *b)* $DM = 0,6$ cm, M între B și D ; *c)* M coincide cu D ; *d)* M coincide cu A ; *e)* M coincide cu B .
74. 5 cm. **75.** 4 cm; 9 cm.

1 cm mai mare ca BD . Se cere lungimea segmentului BD .

77. Dacă mărim o latură a unui pătrat cu 3 cm, iar cealaltă cu 4 cm, aria sa crește cu 68 cm^2 . Se cere latura pătratului.

78. O răsadniță are formă de pătrat (cîte răsaduri sînt într-un rînd, atitea rînduri sînt). Grădinarul a făcut socoteala ca, dacă ar pune într-un rînd cu 3 rasaduri mai mult, și ar mări tot cu 3 numărul rîndurilor, ar încăpea în răsadniță cu 219 răsaduri mai mult. Cîte rasaduri a pus într-un rînd?

79. Se planteaza o livada in forma de patrat si, pentru aceasta, s-au adus un dumar de puieți care urmează a fi sadiți la distanțe egale. Se pun in fiecare rînd un numar de puieți și ramîn 13 puieți nesadiți; dacă s-ar fi pus in fiecare rînd cu 1 mai mult și s-ar mări numărul rîndurilor tot cu 1, ar mai fi rămas loc pentru 18 puieți. Cîte puieți s-au pus într-un rînd?

Interpretarea soluțiilor negative

În problemele următoare, se va arăta, cînd este posibil, ce sens au soluțiile negative. Problemele se vor rezolva și pe cale aritmetică.

80. Cu cît trebuie să mărim numărătorul fracției $\frac{7}{15}$, ca să obținem o fracție egală cu $\frac{3}{5}$? Cu cît trebuie să mărim numărătorul aceleiași fracții ca să obținem o fracție egală cu $\frac{1}{3}$?

76. 1 cm. 77. 8 cm. 78. 35 de rasaduri. 79. 15. 80. Cu 2; trebuie să-l micșorăm cu 2.

81. Există bomboane de 22,50 lei kilogramul și de 18,20 lei kilogramul. S-au cumpărat 1,5 kg bomboane mai scumpe și o cantitate de bomboane mai ieftine și s-a plătit în total 32 de lei. Cât s-a cumpărat din bomboanele mai ieftine?

82. Un caiet costă 1,20 lei, iar un creion costă 0,70 lei. Cu 10,5 lei s-au cumpărat 94 de caiete și x creioane. Câte creioane s-au cumpărat?

83. O gospodărie agricolă colectivă dispune de 88 500 kg de grâu pentru semința și s-au mai adus x kg. Grâul s-a semănat pe un teren de 520 ha, punându-se pe fiecare hectar 170 kg de semințe. Să se afle x .

84. O marfa oarecare a costat 12,50 lei kilogramul și s-a scumpit cu x lei la kilogram. Acum 7,50 kg costă 86,25 lei. Să se afle x .

85. Într-o clasă au fost 37 de elevi și au mai venit x elevi. Pentru a merge la un film, fiecare elev da 1,50 lei și astfel se strâng 52,50 lei. Să se afle x .

86. Laturile unui triunghi sînt de 18,5 cm, 22,6 cm și 25,4 cm. Marim toate laturile cu un segment de aceeași lungime x , astfel ca perimetrul triunghiului să fie de 63,5 cm. Să se afle x .

87. Într-un triunghi ABC , se da $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm. Prin mijlocul M al laturii AB se duce o paralelă la BC și se notează cu N punctul ei de intersecție cu AC . Cu cât trebuie să mărim distanța AM , ca lungimea segmentului MN să fie de 7 cm?

81. Imposibil. 82. Imposibil. 83. Au mai rămas 100 kg. 84. S-a scumpit cu 1 lei la kg. 85. Au plecat 2 elevi. 86. Laturile trebuie mășurate cu cîte 1 cm. 87. AM trebuie micșorat cu $\frac{1}{3}$ cm.

Capitolul VI SISTEME DE ECUAȚII

76. O singură ecuație cu două necunoscute. Considerăm ecuația:

$$x + y = 7.$$

Ea conține două necunoscute, x și y . Toți termenii necunoscuți sînt de gradul întâi, de aceea se spune că ecuația este de gradul întâi. O asemenea ecuație se numește *ecuație de gradul întâi cu două necunoscute* sau *ecuație liniară cu două necunoscute*.

Acastă ecuație ne arată că suma numerelor x și y este 7. Putem noi deduce de aici valorile necunoscutelor? Nu. Putem lua $x = 1$, atunci trebuie să luăm $y = 6$; putem lua $x = 10$, atunci trebuie să luăm $y = -3$ ș.a.m.d. Tabelul de mai jos arată și alte cazuri posibile:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	10	9	8	7	6	5	4	3	2	...

Fiecare dintre aceste perechi de numere este o *soluție* a ecuației. Acastă ecuație are o *infinitate* de soluții (oricîte soluții vrem). Le aflăm astfel: înlocuim x din ecuație printr-o valoare *oarecare* și scoatem valoarea lui y din ecuația astfel obținută.

Se poate proceda și invers. Dăm lui y diferite valori și rezolvăm ecuația obținută în raport cu x , așa cum arată tabelul:

$y $. . .	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	. . .
$x $. . .	10	9	8	7	6	5	4	3	2	. . .

O ecuație de gradul întâi cu două necunoscute are o infinitate de soluții. Pentru a le afla, dăm uneia dintre necunoscute valori oarecare și rezolvăm ecuația în raport cu cealaltă necunoscută.

E x e m p l u. Considerăm ecuația:

$$2x - 5y = 12.$$

Cele două tabele de mai jos dau diferite soluții ale acestei ecuații:

$x $. . .	-6;	-3;	0;	3;	6;	9;	12;	15...
$y $. . .	$-4\frac{4}{5}$;	$-3\frac{3}{5}$;	$-2\frac{2}{5}$;	$-1\frac{1}{5}$;	0;	$1\frac{1}{5}$;	$2\frac{2}{5}$;	$3\frac{3}{5}$

$y $. . .	-4	-2	0	2	4	6	8	10	. . .
$x $. . .	-4	1	6	11	16	21	26	31	. . .

În primul tabel am luat valorile lui x la întâmplare și am calculat valorile lui y . În tabelul al doilea am procedat invers.

77. Observări. 1) Faptul că o singură ecuație cu două necunoscute admite mai multe soluții are un sens concret. Considerăm problema următoare: *Într-o papetarie sînt caiete de 3 lei și de 2 lei. Vrem să cumpărăm caiete pentru 60 de lei. Cîte caiete vom cumpăra de fiecare fel?*

Notăm cu x numărul caiete arată cîte caiete cumpărăm din primul fel, și cu y numărul care arată cîte caiete de-al doilea fel cumpărăm. Ecuația problemei este:

$$3x + 2y = 60.$$

Tabelul de mai jos dă diferite soluții ale acestei ecuații

x	0	2	4	6	8	10	...
y	30	27	24	21	18	15	...

Dacă ecuația are mai multe soluții, atunci și problema are mai multe soluții. Putem lua pentru x o valoare *oarecare*; aceasta înseamnă că putem cere un număr *oarecare* de caiete de primul fel, câte vrem (valoarea lor să nu treacă de 60 de lei). Îndată ce am ales valoarea lui x , putem afla valoarea lui y ; aceasta înseamnă că, după ce am hotărât câte caiete de primul fel cumpărăm, se știe precis câte caiete de-al doilea fel vom putea lua.

2) O ecuație cu două necunoscute, de exemplu: $2x - 5y = -12$ face ca fiecărei valori a lui x să-i corespundă o valoare a lui y . Se spune că y este *funcție* de x . Aceeași ecuație face ca fiecărei valori a lui y să-i corespundă o valoare a lui x . Se poate spune că x este funcție de y .

78. Forma redusă. O ecuație cu două necunoscute poate avea o formă mai complicată. De exemplu:

$$\frac{2x}{6} - \frac{y}{2} + \frac{y+1}{2} = \frac{x+1}{4} - \frac{y-1}{4} - \frac{x-1}{8}.$$

Proceedind ca la ecuațiile cu o singură necunoscută, o putem aduce la o formă mai simplă.

Eliminăm numitorii (înmulțim ambii membri cu 24 și simplificăm):

$$8x - 4y + 12y + 12 = 6x + 6y - 6 - 3x + 3.$$

Trecem termenii necunoscuți în membrul stâng, iar pe cei cunoscuți în membrul drept și reducem termenii asemenea:

$$5x + 2y = -15.$$

Aceasta este forma cea mai simplă (redușă) sub care poate fi pusă această ecuație. Ea este

formată dintr-un termen în x , un termen în y și un termen liber. Orice ecuație care poate fi adusă la această formă este o *ecuație de gradul întâi cu două necunoscute*.

79. Sistem de ecuații liniare. Considerăm ecuațiile:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 29; \\ 2x + 3y = 27. \end{cases}$$

Acste ecuații formează un *sistem* de două ecuații cu două necunoscute. Aceasta înseamnă că litera x din prima ecuație reprezintă *același* număr ca în ecuația a doua, de asemenea și litera y ; de aceea se pune în fața ecuațiilor o acoladă. O soluție a sistemului este formată din două numere, o valoare pentru x și una pentru y , care satisfac atât prima ecuație, cât și a doua.

În tabelul de mai jos am dat lui x diferite valori și am aflat valoarea lui y din prima ecuație.

$x $	-4	0	4	2	3	4	5	6
$y $	17	14,5	12	9,5	7	4,5	-2	-0,5

În tabelul următor am făcut lucrarea analoga pentru ecuația a doua.

x	1	0	1	2	3	4	5	6
y	$9\frac{2}{3}$	9	$8\frac{1}{3}$	$7\frac{2}{3}$	7	$6\frac{1}{3}$	$5\frac{2}{3}$	5

Se constată că, în general, perechile de numere din primul tabel nu se găsesc în tabelul al doilea, după cum perechile de numere din tabelul al doilea nu se găsesc în primul tabel. Cu alte cuvinte, prima ecuație are o *infinitate* de soluții, dar ele

nu satisfac ecuația a doua; ecuația a doua are și ea o infinitate de soluții, dar ele nu satisfac prima ecuație. Numai perechea $x = 3, y = 7$, se găsește în ambele tabele; aceste valori satisfac amândouă ecuațiile. Soluția acestui sistem este: $x = 3, y = 7$.

$$\begin{aligned} \text{Proba: } 5x + 2y &= 5 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 15 + 14 = 29; \quad 29 = 29. \\ 2x + 3y &= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 6 + 21 = 27; \quad 27 = 27. \end{aligned}$$

A rezolva un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, înseamnă a găsi cîte o valoare pentru fiecare necunoscută care să satisfacă amîndouă ecuațiile.

Am reușit să rezolvăm sistemul de mai sus prin încercări. În cele ce urmează vom da metode de a rezolva un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute.

80. Metoda substituției. 1) Considerăm sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26; \\ y = 2x + 1. \end{cases}$$

Ecuația a doua ne arată că y este egal cu $2x + 1$. Deci, putem înlocui în prima ecuație y prin $2x + 1$. Obținem:

$$3x + 4(2x + 1) = 26.$$

Am obținut o ecuație cu o singură necunoscută. O rezolvăm:

$$3x + 8x + 4 = 26; \quad 11x = 22; \quad x = 2.$$

Introducem această valoare a lui x în ecuația a doua; obținem:

$$y = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Soluția sistemului este: $x = 2; y = 5$.

Am înlocuit y din prima ecuație prin expresia $2x + 1$, adică am făcut o substituție. Datorita substituției, am *eliminat* necunoscuta y . Aceasta metodă se numește *metoda eliminării prin substituție*, sau pe scurt, *metoda substituției*.

2) În exemplul precedent, una dintre ecuațiile sistemului avea o formă specială: în membrul stâng numai y , iar în membrul drept, o expresie care nu conține y . Dacă o ecuație nu are aceasta formă, i-o dăm noi, ca în exemplul următor:

$$\begin{cases} x + 5y = 17; \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

În prima ecuație, trecem termenul $5y$ în membrul drept; obținem

$$x = 17 - 5y.$$

Introducem în ecuația a doua, în locul lui x , expresia $17 - 5y$; obținem

$$3(17 - 5y) + 2y = -1; 51 - 15y + 2y = -1; \\ -13y = -52, y = 4.$$

Introducem această valoare a lui y în expresia lui x

$$x = 17 - 5y = 17 - 5 \cdot 4 = -3.$$

Soluția sistemului este: $x = -3$; $y = 4$.

3) Fiind dat un sistem de două ecuații cu două necunoscute, metoda substituției se poate aplica sub patru forme: *a)* se poate scoate x din prima ecuație; *b)* se poate scoate y din prima ecuație; *c)* se poate scoate x din ecuația a doua; *d)* se poate scoate y din ecuația a doua. Este bine să scoatem x sau y din acea ecuație unde are coeficientul 1, cum a fost cazul lui x din prima ecuație.

81. Metoda reducerii. 1) Fie sistemul:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 17; \\ 2x + 5y = 31. \end{cases}$$

Dacă x și y sînt numere care satisfac sistemul, expresia $4x + 5y$ are valoarea 17, iar $2x + 5y$ are valoarea 31. Atunci suma acestor două expresii are valoarea $17 + 31 = 48$. Avem deci voie să adunăm membrul stîng cu membrul stîng și membrul drept cu membrul drept. Făcînd aceasta, y se reduce și obținem:

$$6x = 48; \quad x = 8.$$

Introducem această valoare a lui x în una din cele două ecuații date, de exemplu în prima:

$$4 \cdot 8 + 5y = 17; \quad 32 + 5y = 17; \quad 5y = -15; \\ y = -3.$$

Soluția sistemului este: $x = 8$; $y = -3$.

Am reușit să rezolvăm acest sistem datorită faptului că, atunci cînd am adunat ecuațiile, una dintre necunoscute, y , s-a redus. În felul acesta, am eliminat necunoscuta y . Această metodă se numește *metoda eliminării prin reducere*, sau, pe scurt, *metoda reducerii*.

2) Considerăm acum sistemul:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 33; & : 3 \\ 7x + 6y = 47. & : 2 \end{cases}$$

În exemplul precedent, y s-a redus deoarece coeficientul lui din prima ecuație era opus celui din ecuația a doua (-5 și $+5$). În cazul de față?

această condiție nu mai este îndeplinită. Vom face ca sistemul să îndeplinească această condiție.

Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație cu 3, și a doua cu 2 (acești factori se scriu la dreapta liniei verticale). Obținem:

$$\begin{cases} 15x - 12y = 99; \\ 14x + 12y = 94. \end{cases}$$

Adunăm ecuațiile:

$$-x = -5; \quad x = 5.$$

Introducem această valoare a lui x în una din cele două ecuații date, de exemplu în prima ecuație:

$$5 \cdot 3 - 4y = 33; \quad 4y = 8; \quad y = 2.$$

Soluția sistemului este: $x = 5; y = 2$.

De ce am înmulțit ecuațiile tocmai cu -3 și 2 ? Trebuia să înmulțim fiecare ecuație astfel încât coeficientul lui y să fie egal în valoare absolută. Înmulțind prima ecuație cu 2, 3, 4, ..., coeficientul lui y devine: 8, 12, 16, ..., adică un multiplu al lui 4; dacă înmulțim ecuația a doua cu 2, 3, 4, ..., coeficientul lui y devine 12, 18, 24, ..., adică un multiplu al lui 6. Coeficientul lui y din cele două ecuații va trebui să fie un multiplu comun al numerelor 4 și 6. Alegem c.m.m.m.c. și anume 12; $12 : 4 = 3$, de aceea înmulțim prima ecuație cu 3; $12 : 6 = 2$, de aceea înmulțim ecuația a doua cu 2. De fapt, înmulțim prima ecuație cu -3 , nu cu 3, ca să obținem coeficienți opuși. Puteam tot așa de bine să înmulțim prima ecuație cu 1, dar atunci trebuia să înmulțim ecuația a doua cu -2 , nu cu 2.

3) Pentru a rezolva acest sistem, am eliminat necunoscuta y . Puteam elimina necunoscuta x .

Pentru aceasta ar fi trebuit să înmulțim prima ecuație cu -7 și a doua cu 5 . Am preferat prima cale, pentru că intervin numere mai mici.

E x e m p l u. În practică, lucrările se așază ca în exemplul următor:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 12x - 8y = 28 \\ 15x + 4y = 42 \end{array} \right| \cdot 4 \\ -60x + 40y = -140 \\ \hline 60x + 16y = 168 \\ \hline 56y = 28 \end{array}$$

$$y = \frac{28}{56} = \frac{1}{2};$$

$$12x - 8 \cdot \frac{1}{2} = 28$$

$$12x - 4 = 28$$

$$12x = 32$$

$$x = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3};$$

$$x = 2 \frac{2}{3}; y = \frac{1}{2}.$$

Nu este necesar să se scrie ecuațiile din rândurile 3 și 4. Înmulțirea și reducerea termenilor asemenea se poate face mintal, astfel:

$12(-5) = -60x$, $15x \cdot 4 = 60x$, $-60x$ cu $60x$ se reduce

$$8y(-5) = -40y, \quad 4y \cdot 4 = 16y, \quad -40y - 16y = -56y;$$

$$28(-5) = -140, \quad 42 \cdot 4 = 168, \quad -140 - 168 = -28.$$

Apare astfel direct ecuația $56y = 28$.

82. Observare. Metoda aducerii la același termen de comparație folosită în aritmetică nu se deosebește mult de metoda reducerii. Considerăm problema: 5 caiete și 4 creioane costă 33 de lei; 7 caiete și 6 creioane costă 47 de lei. *Cît costă un caiet, cît costă un creion?*

Notăm cu x numărul care arată (în lei) cît costă un caiet și cu y , cît costă un creion. Ecuațiile problemei sînt:
 $5x + 4y = 33$; $7x + 6y = 47$. Am rezolvat acest sistem la § 81. În schema de jos se pun lafa în fața cele două procedee:

5 caiete și 4 creioane costă 33 de lei	$5x + 4y = 33$	3
7 caiete și 6 creioane costă 47 de lei	$7x + 6y = 47$	2
15 caiete și 12 creioane costă 99 de lei	$15x + 12y = 99$	
14 caiete și 12 creioane costă 94 de lei	$14x + 12y = 94$	
1 caiet costă	$x = 5$	

83. Exemplu. Cînd ecuațiile au o formă mai complicată, le aducem întîi sub forma cea mai simplă, apoi aplicăm una dintre metode. De cele mai multe ori se folosește metoda reducerii; metoda substituției se folosește în special cînd, în una dintre ecuații, o necunoscută, x sau y , are coeficientul 1. Luăm, de exemplu, sistemul

$$\begin{cases} x + y - 2 = y + 2y - 2 = 11; \\ 7x + 6y - 10 = y + 4 = 12; \\ 7x + 6y - 10 = y + 4 = 1. \end{cases}$$

Procedăm cu prima ecuație cum s-a arătat la §78 și obținem ecuația $x + 4y = 9$; procedăm la fel cu ecuația a doua și obținem: $2x + y = 11$. Sub forma redusă, sistemul este:

$$\begin{cases} x + 4y = 9; \\ 2x + y = 11. \end{cases}$$

Se poate folosi metoda substituției, scoțind x din ecuația întâi, sau y din ecuația a doua. Totuși, metoda reducerii convine mai bine; înmulțim prima ecuație cu -2 și o adunăm cu a doua; obținem $7y = 7$; $y = 1$; apoi prima ecuație dă $x = 5$.

84. Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de ecuații. Aceste probleme se deosebesc de problemele care duc la o ecuație cu o singură necunoscută numai prin faptul că ele conțin două necunoscute. Vom arăta aceasta prin exemple.

Un bloc de locuințe muncitorești are 30 de apartamente, unele de câte trei camere, altele de câte două camere. În total sînt 78 de camere de locuit (celelalte încăperi nu se socotesc). Cîte apartamente de fiecare fel are blocul?

Rezolvare. Notăm cu x numărul apartamentelor de câte trei camere și cu y numărul apartamentelor de câte două camere. În total sînt 30 de apartamente, deci: $x + y = 30$.

Numărul de camere din cele x apartamente... $3x$;

„ „ „ „ „ y „ ... $2y$.

Numărul total de camere din tot blocul... $3x + 2y$.

Se da că blocul are 78 de camere, deci:

$$3x + 2y = 78.$$

Am format sistemul de ecuații

$$x + y = 30; \quad 3x + 2y = 78.$$

Soluția lui este: $x = 18$; $y = 12$.

Răspuns. Blocul are 18 apartamente de câte trei camere și 12 apartamente de câte două camere.

Proba. Numărul total de apartamente din tot blocul este $18 + 12 = 30$, așa cum s-a dat. Cele 18 apartamente de câte 3 camere au $3 \cdot 18 = 54$ de camere; cele 12 aparta-

ral total de saci). Pentru a putea pune problema în ecuație, ne ajutam de schema următoare:

	<i>Cîți saci ia de fiecare dată</i>	<i>Cîte drumuri face</i>	<i>Cîți saci transportă în total</i>
În realitate	x	y	xy
În cazul I	$x + 10$	$y - 2$	$(x + 10)(y - 2)$
În cazul II	$x - 6$	$y + 2$	$(x - 6)(y + 2)$

Numărul total de saci transportați este mereu același, deci expresiile din coloana a treia trebuie să fie egale între ele. Scriem ca expresia a doua și a treia sînt egale cu prima:

$$\begin{aligned}(x + 10)(y - 2) &= xy; \\ (x - 6)(y + 2) &= xy.\end{aligned}$$

Rezolvăm acest sistem și obținem: $x = 30$, $y = 8$.

Răspuns. Soferul a făcut 8 drumuri și a luat de fiecare dată cîte 30 de saci.

85. Rezolvarea problemelor pe cale algebrică și pe cale aritmetică. În aritmetică se folosese la rezolvarea problemelor metode diferite, pe cînd în algebră, toate problemele acestea se rezolvă prin aceeași metoda, cu ajutorul ecuațiilor. Pentru a explica acest lucru mai bine, considerăm problemele următoare:

1) O marfă oarecare se împachetează în lăzi mari și mici. O ladă mare și una mică conțin împreună 30 kg. Trei lăzi mari și două lăzi mici conțin împreună 78 kg. Cîte kilograme conține o ladă de fiecare fel?

Un bloc de locuințe municipale are 30 de apartamente, unele de cîte trei camere, altele de cîte doua camere. În total sînt 78 de camere de locuit. Cîte apartamente de fiecare fel are blocul?

Notăm cu x numărul care arată câte kilograme conține o ladă mare, și cu y numărul care arată câte kilograme conține o ladă mică. Obținem sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 30; \\ 3x + 2y = 78. \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul prin metoda reducerii. Înmulțim prima ecuație cu 2:

$$(a) \quad \begin{cases} 2x + 2y = 60; \\ 3x + 2y = 78. \end{cases}$$

Scădem prima ecuație dintr-a doua și obținem $x = 18$.

În aritmetică, o astfel de problemă se rezolvă prin metoda aducerii la același termen de comparație²:

- 1 ladă mare și 1 ladă mică conțin 30 kg;
- (1) 2 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 60 kg;
- 3 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 78 kg.

Să punem față în față felul în care se rezolvă acest sistem și cum se rezolvă problema în aritmetică.

- $x + y = 30$, 1 ladă mare și 1 ladă mică conțin 30 kg;
- $3x + 2y = 78$, 3 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 78 kg.

Înmulțim prima ecuație cu 2. Cât cîntărese de două ori mai multe lăzi!

- $2x + 2y = 60$, 2 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 60 kg;
 - $3x + 2y = 78$, 3 lăzi mari și 2 lăzi mici conțin 78 kg.
- Scădem prima ecuație dintr-a doua. Comparăm rîndurile.
- $x = 18$, ... o ladă mare conține 18 kg.

Asemănarea este desăvîșită. Aceasta se datorește faptului că aici mărimile din prima ecuație sînt de același fel cu cele din ecuația a doua. Ecuațiile exprimă lucrul următor:

$$\begin{aligned} x \text{ kg} + y \text{ kg} &= 30 \text{ kg} \\ 3x \text{ kg} + 2y \text{ kg} &= 78 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Avem peste tot monar kilograme. Factorul 2 care intervine este înmulțitor, deci număr *abstract*.

Să trecem la problema a doua. Ea a fost rezolvată la § 84. Sistemul de ecuații este același, soluția este tot aceeași. Totuși, în aritmetică, o asemenea problemă se rezolvă pe

altă cale, prin „metoda ipotezelor“. Care este cauza acestei nepotriviri? În cazul problemei a doua, ecuațiile exprimă lucrul următor:

$$x \text{ apartamente I} + y \text{ apartamente II} = 30 \text{ apartamente}; \\ 3x \text{ camere} + 2y \text{ camere} = 78 \text{ camere}.$$

Maximile din ecuația a doua nu sînt de același fel cu cele din prima ecuație. Numerele din prima ecuație reprezintă apartamente, iar cele din ecuația a doua reprezintă camere. Semnificația concretă a sistemului (a) este deci:

$$2x + 2y = 60, \dots 2x \text{ apartamente} + 2y \text{ apartamente} \rightarrow \\ \rightarrow 60 \text{ apartamente};$$

$$3x + 2y = 78, \dots 3x \text{ camere} + 2y \text{ camere} \rightarrow 78 \text{ camere}.$$

Faptul că în ambele ecuații apare același termen ($2y$) nu folosește la nimic. Scăderea n-are în acest caz nici un sens. Ar trebui să scădem 60 de apartamente din 78 de camere.

Pentru ca folosirea factorului 2 să aibă sens, lucrurile trebuie interpretate altfel. Să presupunem că un apartament, indiferent de ce fel, ar avea două camere. Atunci x apartamente ar avea $2x$ camere, y apartamente ar avea $2y$ camere și sistemul (a) capătă interpretarea următoare:

$$2x + 2y = 60, \dots 2x \text{ camere} + 2y \text{ camere} = 60 \text{ camere}; \\ 3x + 2y = 78, \dots 3x \text{ camere} + 2y \text{ camere} = 78 \text{ camere}.$$

Acum scăderea are sens. Așa se procedează în aritmetică, la „Metoda ipotezelor“. De fapt nu se înmulțește cu 2, ci numărul 2 (mai precis numărul concret 2 camere) se înmulțește cu numerele abstracte x și y .

Așadar, în aritmetică, în judecățile pe care le facem, luăm seamă de semnificația concretă a numerelor, de aceea aceste două probleme se rezolvă pe căi deosebite. În algebră, se lucrează cu numere abstracte, ceea ce simplifică mult lucrurile. Unul din foloasele algebrei constă, deci, în faptul că se lucrează cu numere abstracte.

EXERCIIU

1. Se da ecuația $3x + 2y = 9$. Să se dea lui x diferite valori, de exemplu: $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$ și să se afle valorile corespunzătoare ale lui y . Să se dea apoi lui y diferite valori și să se afle

valorile corespunzătoare ale lui x . Se vor face doar 1 tabel, ca cele de la § 76.

2. Se dă ecuația $5x - 3y = 12$. Să se dea lui x o valoare oarecare, de exemplu $x = 4$ și să se afle valoarea corespunzătoare a lui y . Să se introducă apoi în ecuație valoarea afată pentru y și să se afle valoarea corespunzătoare a lui x . Ce se constată? Să se repună în rată dând lui x alte valori.

3. Se dă ecuația: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ și $\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 1$.

a) Să se dea lui x valoarea $x = 1$ și să se afle valoarea corespunzătoare a lui y ; b) să se dea lui y valoarea $y = 3$ și să se afle valoarea corespunzătoare a lui x .

4. Elevul A a cumpărat 5 caiete și 3 creioane și a plătit 26 de lei. În drum spre casă el s-a gândit să afle cu cât s-a socotit un caiet și cu cât s-a socotit un creion. Va putea el să afle răspunsul. Elevul B a cumpărat 4 caiete și 2 creioane și a plătit 20 de lei. În drum spre casă, el își pune aceeași problemă. Va putea să o rezolve? Cei doi elevi se întâlnesc și își spun unul altuia ce au cumpărat. Acum vor putea afla cât costa un creion și cât costă un caiet?

Să se rezolve prin metoda substituției:

$$5. \begin{cases} 3x - 2y = 19; \\ y = x - 7. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x - 4y = 3; \\ 2x + 5y = -1. \end{cases}$$

Prima număr reprezintă valoarea lui x , iar al doilea, a lui y : 5. 1; -2; 6. $6\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3}$.

$$7. \begin{cases} y & 2x & 1; \\ y & x & 5. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x + 3y = 25; \\ 2y + x = 15. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x & 6y & 1; \\ x & 3y & 3. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} 2x + 5y = 1; \\ 4x + 5y = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x & y; \\ 5x & 3y & 7. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} x + 11y = 0; \\ 3x - 2y = 15. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} y & 5x & 2; \\ 2y & 3x & 7. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} x = 3y - 1; \\ y = 2x + 1. \end{cases}$$

Să se rezolve prin metoda reducerii:

$$15. \begin{cases} 3x & 2y & 16; \\ 5x & 2y & 2 \end{cases} \quad 16. \begin{cases} 4x & y & 7; \\ 4x & 3y & 11 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 5x & 7y & 1; \\ 6x & 7y & 3. \end{cases} \quad 18. \begin{cases} 3x + 8y = 10; \\ 3x + 5y = 8. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x & 11y & 2; \\ 3x & 8y & 17 \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 6x + y = 40; \\ 5x - 2y = 39. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 18x & 47y & 9; \\ 16x & 10y & 23. \end{cases} \quad 22. \begin{cases} 28x - 48y = -61; \\ 108x + 96y = -1. \end{cases}$$

$$7. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 8. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 9. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 10. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 11. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$12. \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 13. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 14. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$15. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 16. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 17. \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 18. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 19. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$20. \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad 21. \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad 22. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$23. \begin{cases} 15x + 7y = 23; \\ 20x + 17y = 23. \end{cases} \quad 24. \begin{cases} 11x + 24y = 66; \\ 7x - 36y = 42. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 7x + 3y = -26; \\ 5x - 4y = -18. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} 11x + 12y = 35; \\ 12x + 13y = 38. \end{cases}$$

Sa se rezolve sistemele urmatoare:

$$27. \begin{cases} 2(x + 2y) - 3(x + 3y) = 5; \\ x = 1 - 2y. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x - 3(y - 2) + 2(x - 2) = 3; \\ 3x - 5y = -1. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x + y = 8; \\ 2(x + y - 1) - 5(x - y + 1) = 7. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 3(x - 2y + 1) + 2(x + 3y - 2) = 9; \\ 4(x + y - 2) - 2(2x - 2y - 3) = 2. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 14; \\ 4x - 3(2x + y - 1) = 2(x - y + 1) + 8. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x - 3(y + 1) = 3; \\ 2(x + 1) - 5y = x + y - 2. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} 2x - 3(x - 3y + 2) = 4(x - y + 1) - 10; \\ x(y + 1) - y(x - 1) = 3. \end{cases}$$

23. 2; -1. 24. 6; 0. 25. $-3\frac{29}{4}$; $\frac{1}{4}$. 26. -1; 2.
27. 5; -2. 28. $\frac{1}{3}$; 1. 29. $4\frac{1}{5}$; $3\frac{4}{5}$. 30. 2; 2. 31. 3; -1.
32. 0; 0. 33. 0; -3.

$$34. \begin{cases} (4x-3)(3y-2) - (6y-1)(2x-1) - 11(x+y) = 0; \\ (x+1)(y-1) - xy = 8. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} (x+3)(x-2) - (y-2)(y-2) - x^2 + y(y+2) = 2; \\ (x+1)^2 - (y-2)^2 - x^2 - y^2 - 4(x-y) = 1. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} (x+y+1)(x+y-1) - 4x - y - (x+y)^2 = 18; \\ (x+1)^2 - (2y-1)^2 - (x-2y)(x+2y) - 3(x-y) = 7. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x + \frac{y}{3} = 6; \\ \frac{x}{2} + y = 8. \end{cases} \quad 38. \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 5; \\ x + \frac{1}{4}y = 6. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = y; \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{y}{3}. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} \frac{x-2y}{2} - 3 = \frac{2x-y}{3}; \\ \frac{y-x}{7} - \frac{x+1}{4} = \frac{y+3}{4}. \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} x + \frac{x+y}{3} = y - \frac{y}{2} - \frac{1}{2}; \\ x - \frac{x}{3} + y = y + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$34. \quad 2\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}; \quad 35. \quad 2; \quad 5; \quad 36. \quad 5; 2; \quad 37. \quad 4; 6; \quad 38. \quad 5;$$

$$3; \quad 39. \quad 3, 1; \quad 40. \quad 3, 4; \quad 41. \quad 1, 8; \quad 13, 8.$$

$$42. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1; \\ 6x + 4y + 3z + 12t; \\ \frac{1}{x} + \frac{y}{2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{t} + \frac{v}{2} = 1; \\ \frac{1}{x} + \frac{y}{2} + \frac{1}{z} + \frac{2}{t} + \frac{v}{2} = 1. \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{y}{2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{t} + \frac{v}{2} = 1; \\ \frac{2}{x} + \frac{y}{3} + \frac{1}{z} + \frac{v}{3} = 1; \\ \frac{1}{x} + \frac{y}{3} + \frac{2}{z} + \frac{1}{t} + \frac{v}{3} = 1. \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} 2(x+y) + 3(x+y+6) = 12; \\ \frac{1}{x} + \frac{y}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1; \\ \frac{1}{x} + \frac{y}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1. \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{y}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{2}{v} = 1; \\ \frac{1}{x} + \frac{y}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{2}{v} = 1; \\ (x-1)(y-2) = (x-3)(y-1). \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{y}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{2}{v} = 1; \\ \frac{1}{x} + \frac{y}{2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{2}{v} = 1; \\ 3x - 2y = 7. \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 0; \\ \frac{1}{(x-1)(y-2)} + \frac{1}{(x-1)(y-2)} = 0; \\ (x+2)(y-1) = (x-3)(y-1) + 2(x-y) + 12. \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} 2x + 3y = 8a; \\ y = x + a. \end{cases} \quad 49. \begin{cases} x + 2y = 2b; \\ x = y - b. \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} x + y = 5m; \\ 2x + 5y = 19m. \end{cases} \quad 51. \begin{cases} 2x + y = p; \\ x - 2y = -p. \end{cases}$$

42. 0; 0. 43. 0; 1; 1. 44. 0; 3. 45. 1; 1. 46. 0; 1. 47. 0; 1. 48. 0; 0. 49. 0; 0. 50. 20; 0. 51. 0; 0.

$$52. \begin{cases} x + y = 2a; \\ x - y = 2b. \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} x + y = a + b; \\ x - y = a - b. \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} 2x + y = 4a + 5b; \\ x + 2y = 5a + 4b. \end{cases}$$

$$55. \begin{cases} x + y = 2a + b; \\ 2x - y = a - b. \end{cases}$$

$$56. \begin{cases} 2x + y = 7; \\ 4x + 2y = 14. \end{cases}$$

$$57. \begin{cases} y = x + 1; \\ y = x + 3. \end{cases}$$

$$58. \begin{cases} 2x + 6y = 10; \\ 3x + 9y = 15. \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} 2(x - y) - 3(x - y) - x + y = 8; \\ 3(x - 2) - 2(y - 2) - 2(x - 1) - y = 12. \end{cases}$$

60. În sistemele următoare, să se determine valoarea lui m astfel ca sistemul să fie: *a)* nedeterminat; *b)* incompatibil.

$$a) \begin{cases} 2x + 5y = 8; \\ 4x - 10y = m; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4x + 12y = 8; \\ 3x - 9y = m. \end{cases}$$

PROBLEME

3.1. Se considera două numere. *a)* Dacă mărimea unuia din ele cu 38 și celălalt cu 53, suma lor devine 120. Să se afle suma celor două numere. Să se dea exemple; *b)* Dacă mărșoram pe cel mai mare cu 6 și mărșoram pe cel mai mic cu 15, diferența lor devine 41. Se cere diferența dintre cele două numere. Să se dea exemple.

52. $a = b = c = b$ 53. $a = b$ 54. $a = 2b$, $b = 4$ 55. $a = a + b$ 56. Ned. 57. Incomp. 58. Ned. 59. 1. compatibil. 60. *a)* $m = 0$, $m = 6$, $m = 16$, $m = 18$, $m = 20$, $m = 22$, $m = 24$, $m = 26$, $m = 28$, $m = 30$, $m = 32$, $m = 34$, $m = 36$, $m = 38$, $m = 40$, $m = 42$, $m = 44$, $m = 46$, $m = 48$, $m = 50$, $m = 52$, $m = 54$, $m = 56$, $m = 58$, $m = 60$, $m = 62$, $m = 64$, $m = 66$, $m = 68$, $m = 70$, $m = 72$, $m = 74$, $m = 76$, $m = 78$, $m = 80$, $m = 82$, $m = 84$, $m = 86$, $m = 88$, $m = 90$, $m = 92$, $m = 94$, $m = 96$, $m = 98$, $m = 100$. *b)* 62.

2. Se consideră două numere: *a*) Dacă înmulțim unul din ele cu 5 și pe celălalt cu 3, produsul lor devine 165. Se cere produsul celor două numere; *b*) Dacă împărțim unul din ele la 2 și pe celălalt la 3, produsul lor devine 180. Se cere produsul celor două numere. Să se dea exemple.

3. Raportul dintre jumătatea unui număr și treimea unui alt număr este a . Să se afle raportul dintre cele două numere. Exemple.

4. 18% dintr-un număr este egal cu 15% dintr-un alt număr. Care este raportul dintre aceste numere? Exemple.

5. Dacă dublam baza unui dreptunghi și mărim înălțimea sa de 3 ori, obținem un dreptunghi cu aria de 288 m². Să se afle aria dreptunghiului. Exemple.

6. Dacă mărim o latură a unui triunghi cu 5 cm, o altă latură cu 6 cm și latura a treia cu 7 cm, perimetrul triunghiului devine de 40 cm. Să se afle perimetrul triunghiului. Exemple.

7. Avem două numere. Dacă le mărim pe amândouă cu 2, produsul lor crește cu 30. Ce putem spune despre aceste numere? Ce schimbare suferă produsul lor, dacă le micșorăm pe amândouă cu 2?

8. Suma a două numere este 19. Triplul primului număr, adunat cu numărul al doilea, dă suma 35. Să se afle cele două numere.

9. Suma a două numere este 22. Dacă scădem din primul număr dublul numărului al doilea obținem diferența 1. Să se afle cele două numere.

2. *a*) 11; *b*) 1 080. 3. $\frac{2a}{3}$. 4. $\frac{5}{6}$. 5. 48 m². 6. 22 cm. 7. Suma lor este 13; produsul scade cu 22. 8. 8; 11. 9. 15; 7.

10. Diferența a două numere este 37. Dacă înmulțim primul număr cu 5, al doilea cu 2 și adunăm rezultatele, obținem suma 130. Să se afle cele două numere.

11. Un număr este cu 8 mai mare decât altul. Numărul mai mare este cu 1 mai mic decât dublul numărului mai mic. Să se afle cele două numere.

12. Avem două numere. Dacă înmulțim primul număr cu 2, al doilea cu 3 și adunăm produsele, obținem rezultatul 45. Dacă înmulțim primul cu 5, al doilea cu 2, și scădem al doilea produs din primul, obținem diferența 8. Să se afle cele două numere.

13. Avem două numere. Sfertul primului număr este egal cu treimea numărului al doilea. Media aritmetică a celor două numere este 21. Să se afle cele două numere.

14. Avem două numere. Dacă adunăm sfertul primului număr cu treimea numărului al doilea, obținem 8; dacă din jumătatea primului număr scădem treimea numărului al doilea, obținem diferența 1. Să se afle cele două numere.

15. Diferența a două numere este 354. Știind că $\frac{3}{8}$ din unul face cât 40% din celălalt, să se afle cele două numere.

16. Suma a două numere este 2 513. 4% din unul din ele face cât 3% din celălalt. Să se afle cele două numere.

10. $29\frac{1}{7}$; $7\frac{6}{7}$. 11. 9, 17. 12. 6, 11. 13. 24; 18.
14. 12; 15. 15, 5 616; 5 265. 16. 1 077; 1 436.

17. Suma a doua numere este 950. 4% din primul numar și 5% din al doilea numar fac împreună 44. Sa se afle cele doua numere.

18. 5 caiete și 2 creioane costă 14 lei. 10 caiete și un creion costa 20.50 lei. Cit costa un caiet și cit costă un creion?

19. Din totalul investițiilor ce s-au făcut în anul 1960, o parte a fost destinata industriei și o alta parte agriculturii. Fiecare dintre aceste părți se exprimă printr-un numar de procente. Sa se afle aceste doua numere, știind ca pentru industrie și agricultura împreuna s-au prevazut 66.6%, iar pentru industrie cu 26% mai mult decât pentru agricultură.

20. Pentru 3 kg de zahăr și 5 kg de marmelada s-a platit 57 de lei. 4 kg de zahar costa cit 6 kg de marmeladă. Cit costa 1 kg de zahăr, cit costa 1 kg de marmeladă?

21. 4 viței și 5 vaci manincă într-o zi 69 kg de fân, 2 viței și o vacă manincă într-o zi 21 kg de fân. Cite kilograme de fân se dau pe zi unui vițel și cite unei vaci?

22. Un camion poate transporta de 3 ori mai mult decât o căruța și încă 100 kg. Trei camioane și 10 caruțe transporta 15.500 kg. Cit poate transporta un camion și cit o caruța?

23. 12 farfurii mari și 12 farfurii mici costă 260 de lei. Două farfurii mari costa cit 3 farfurii mici. Cit costă o farfurie de fiecare fel?

17. 350; 600. 18. 1.80 lei; 2.50 lei. 19. 51%; 15.3%.
20. 9 lei; 6 lei. 21. 6 kg; 9 kg. 22. 2.500 kg, 800 kg.
23. 18 lei; 12 lei.

24. Un caiet de hirtie velină costă cu 0,75 lei mai mult decât un caiet de hirtie obișnuită. 4 caiete de hirtie velină și 3 caiete obișnuite costa 18,75 lei. Cât costa un caiet de fiecare fel?

25. La o gospodărie agricolă de stat sînt găini și iepuri. În total sînt 431 de capete și 1 008 picioare. Cîte găini și cîte iepuri sînt?

26. Un bloc de locuințe muncitorești urma să coste 3 500 000 lei. Prin efortul muncitorilor și tehnicienilor s-a realizat o economie de 10% la materiale și de 15% la manopera, obținându-se o economie de 374 000 lei. Cît era prevăzut pentru materiale și cît pentru manopera?

27. Un muncitor și-a strîns sîma de 1 100 lei pentru un costum de lână și o pereche de pantofi. În ziua cînd redrepta cîmpul, costumul pe care și-l dădese s-a vîndut cu 15%, iar pantofii cu 10%, și, din cauza acestora, i-au rămas 156 lei. Cît a costat costumul de lână și cît au costat pantofii înainte și după ieftinire?

28. Muncitorii, tehnicienii și inginerii de la două uzine și-au luat angajamentul să realizeze într-un an economii în valoare totală de 5,6 milioane lei. În realitate, prima dintre aceste uzine a realizat de 2,5 ori mai mult, iar a doua — de 3,2 ori mai mult și cele două uzine au realizat astfel în total economii în valoare de 16,1 milioane lei. Ce economii și-a luat angajamentul să realizeze fiecare dintre aceste uzine?

24. 2 25 lei; 3 lei. 25. 68 găini; 7 iepuri. 26. 3 080 000 lei; 420 000 lei. 27. 920 lei; 180 lei; 782 lei; 162 lei. 28. 3 milioane; 2,6 milioane.

29. O sumă de 391 de lei se plătește cu 89 de bancnote de 3 lei și de 5 lei. Cîte bancnote din fiecare fel s-au dat?

30. O sticlă de un litru cu vin costă 17.60 lei. Un litru de vin costa cît 10 sticle goale. Cît costă un litru de vin și cît costă sticla?

31. Deasupra unei cisterne de 45 000 l sînt două robinete *A* și *B*. Le deschidem pe amîndoua și le lăsăm deschise timp de 20 de minute. Dacă după aceasta închidem robinetul *A*, robinetul *B* umple restul din cisternă în 8 minute; dacă însă închidem robinetul *B*, robinetul *A* umple restul în 5 minute. Să se afle debitul celor două robinete.

32. Un bidon plin cu ulei cîntărește $5\frac{1}{2}$ kg. Același bidon, umplut cu ulei numai pe jumătate, cîntărește 3 kg. Cît cîntărește bidonul gol și cît ulei încapă în el?

33. Doi colegi, *A* și *B*, vor să cumpere un obiect care costă 65 de lei. *A* spune lui *B*: „Împrumută-mi jumătate din banii tăi, ca să am tocmă cît trebuie”. *B* răspunde: „Împrumută-mi tu mie o treime din banii tăi și atunci voi avea eu tocmă cît trebuie”. Cît are fiecare din ei?

34. Suma a două numere este s , iar diferența lor este d . Să se afle cele două numere. Să se exprime rezultatul în cuvinte.

35. Suma a două numere este s , iar raportul lor este k . Să se afle cele două numere. Să se facă legătura între formulele care se obțin pentru x și y

29. 27; 62. **30.** 16 lei, 1.60 lei. **31.** 400 litri pe minut; 250 litri pe minut. **32.** 0,5 kg; 5 kg. **33.** 39 lei; 52 lei.

34. $\frac{s+d}{2}$; $\frac{s-d}{2}$.

și metoda care se folosește în aritmetica pentru a afla două numere când se cunoaște suma și raportul lor.

36. Aceeași chestiune, când se cunoaște diferența (d) și raportul (k) a două numere.

37. După recensământul din 1956, populația activă din R.P.R. era de 10,5 milioane de locuitori. Raportul dintre numărul celor din mediul urban și al celor din mediul rural era $\frac{9}{26}$. Cîți locuitori din R.P.R. munceau în mediul urban și cîți în mediul rural?

38. În anii 1938 și 1960 s-au extras în total în țara noastră 10,8 milioane tone carbune brut. Jumătate din cantitatea de carbune extrasă în 1938 este egală cu 17,5% din cea extrasă în 1960. Cîte milioane tone de carbune s-au extras în fiecare din acești ani? Cu cît s-a extras mai mult carbune în 1960 decît în 1938?

39. Raportul dintre producția de zahăr din țara noastră în anii 1938 și 1957 este $\frac{19}{37}$.

În 1957 s-au produs cu 90 mii tone de zahăr mai mult ca în 1938. Cît zahăr s-a produs în fiecare din acești ani?

40. Suma a doua numere este 85. Dacă împărțim unul prin celalalt, obținem cîțul 13 și restul 1. Să se afle cele două numere.

41. Un număr împărțit prin altul dă cîțul 4 și restul 1. Dacă mărim împărțitorul cu 3, cîțul devine 3 și restul 6. Să se afle cele două numere.

35. $\frac{s}{k+1}$; $\frac{ks}{k-1}$. 36. $\frac{d}{k-1}$; $\frac{dk}{k-1}$. 37. 2,7 - 7,8 milioane. 38. 2,8 milioane tone; 8 milioane tone, cu 5,2 milioane tone mai mult. 39. 95 mii tone; 180 mii tone. 40. 79, 6. 41. 57; 14.

12. Un atelier de confecții are o bucată de stola de palton. Dacă se face din toată stola paltoane barbațești, ies 6 paltoane și rămâne o bucată de 2,40 m. Pentru un palton de copil trebuie cu 0,5 cm mai puțin decât pentru un palton barbațesc. Dacă se face numai paltoane de copil, ieș 8 paltoane și nu rămâne nimic. De câți metri este bucată de stola și câta stola trebuie pentru un palton bărbătesc?

13. Într-o tabără de pionieri sînt de 3 ori mai mulți băieți decât fete. Mai vin 18 băieți și 18 fete și atunci sînt în tabără de două ori mai mulți băieți decât fete. Câți băieți și cîte fete au fost?

14. Să se afle două numere, știind că: dacă adăugăm la numărul mai mare 17, el devine dublul numărului mai mic, iar dacă adăugăm același număr la numărul mai mic, ele devin egale.

15. Un drumeț spune: „Mai am înaintea mea un drum de 3 ori mai lung decât drumul pe care l-am făcut. Dacă mai fac 10 km, ajung la jumătatea drumului”. Câți kilometri a parcurs drumețul și câți kilometri trebuie să mai parcurgă el de acum înainte?

16. A spune lui B: „Dă-mi 6 nuci ca să am cît tine!” B răspunde: „Dă-mi tu mie 6 nuci și voi avea de două ori mai multe nuci ca tine!”. Cîte nuci are fiecare din ei?

17. Într-o clasă se afla un număr de elevi și un număr de bănci. Dacă elevii se așază cîte doi într-o bancă, 5 elevi rămîn fără loc. Dacă se așază cîte 3 într-o bancă, rămîn 4 bănci goale. Câți elevi și cîte bănci sînt în clasă?

42. 18 m, 2,40 m. 43. 18; 36. 44. 51; 34. 45. 10 km; 30 km. 46. 42; 30. 47. 17; 39.

48. La cooperativă va exista pânză de 9 lei metrul și de 11 lei metrul. O femeie se duce să cumpere o cantitate de pânză și își face socoteala următoare: dacă ia din pânză mai scumpă, nu-i ating 15 lei; dacă ia din pânză mai ieftină, îi rămân 15 lei. Câți metri de pânză voia să cumpere femeia și câți bani avea?

49. O echipă de muncitori trebuie să taie într-un număr de zile un anumit număr de copaci. Șeful echipei face socoteala următoare: dacă taie cîte 40 de copaci pe zi, rămînem cu 20 de copaci în urmă față de plan; dacă taie cîte 50 de copaci pe zi, depășim planul cu 100 de copaci. În cîte zile trebuie făcută lucrarea și câți copaci trebuie să fie tăiați, după plan?

50. Să se afle două numere, știind că au însușirile următoare: dacă marim primul cu 1 și al doilea cu 2, produsul crește cu 18; dacă marim primul cu 2 și al doilea cu 1, produsul crește cu 19.

51. În magazia unei cantine se găsește o cantitate de zahăr, care este planificată pentru un număr de zile. Dacă s-ar consuma în fiecare zi cîte 6 kg mai mult, provizia s-ar termina cu o zi mai devreme; dacă s-ar consuma în fiecare zi cîte 6 kg mai puțin, provizia ar ține cu două zile mai mult. Cît zahăr a fost planificat să fie consumat în fiecare zi și pentru cîte zile trebuia să ajunga zahărul din magazie?

52. Un muncitor trebuie să facă un număr de piese într-un timp dat. Dacă face cîte 5 piese mai mult pe zi, el termină lucrarea cu o zi înainte de termen; dacă face cîte 3 piese pe zi mai puțin,

48. 150 lei; 15 m. 49. 12 zile; 40 copaci. 50. 1, 6.
51. 18 kg; 4 zile.

el termină lucrarea cu o zi după termen. Câte piese trebuie să facă pe zi și în câte zile urma să termine lucrarea?

53. *a)* Într-un dreptunghi, diferența laturilor este de 16 m, iar perimetrul este de 112 m. Se cer laturile dreptunghiului. *b)* Aceeași problema, dacă diferența laturilor este de 20 cm, iar perimetrul este de 36 cm.

54. *a)* Într-un trapez linia mijlocie este de 17 m, iar diferența dintre baze este de 6 m. Se cer bazele. *b)* Aceeași problema dacă linia mijlocie este de 25 m, iar diferența bazelor este de 60 m.

55. Doua vase conțin împreună 24 l de apă. Turnăm din primul vas în al doilea o treime din conținutul primului vas, apoi turnăm din vasul al doilea în primul o treime din conținutul vasului al doilea. După aceste două operații, vasele conțin cantități egale de apă. Cita apă era la început în fiecare vas?

56. *a)* Doi copii, A și B, au împreună 36 de nuci. A dă lui B jumătate din câte nuci are B, apoi B dă lui A jumătate din câte nuci i-au rămas lui A. După aceste două operații, cei doi copii au același număr de nuci. Câte nuci a avut la început fiecare copil? *b)* Aceeași problemă, dacă doi copii au avut împreună 182 de nuci și operația se face de 4 ori, pînă cînd numărul nucilor se egalează.

57. Într-o familie, soțul și soția câștigau împreună 1 750 lei pe luna. Ulterior, salariul soției s-a marit cu 20%, iar al soțului cu 10% și, ca

52. 15 piese; 4 zile. 53. *a)* 36 m; 20 m; *b)* imposibil. 54. *a)* 20 m; 14 m. *b)* imposibil. 55. 9 l; 15 l. 56. *a)* 20, 16; *b)* 94; 68.

urmare a acestui fapt, salariul soției a devenit cu 30 lei mai mare ca al soțului. Sa se afle salariul fiecaruia dintre ei înainte și după mărirea salariilor.

58. Într-un triunghi ABC , latura AC este cu 5 cm mai lungă decât AB , iar $BC = 10$ cm. Pe latura AB luăm un segment $AM = 1$ cm, ducem prin M o paralela la BC și notăm cu N punctul ei de intersecție cu AC . Perimetrul triunghiului AMN este de 7 cm. Se cer laturile triunghiului ABC .

59. Într-un trapez $ABCD$ cu baza mare AB și baza mică CD , latura $AD = 7$ cm, iar linia mijlocie este de 8,5 cm. Laturile neparalele se taie în E , iar $DE = 5$ cm. Se cer bazele trapezului.

60. Perimetrul unui dreptunghi este de 30 cm. Dacă-i marim baza cu 3 cm și înălțimea cu 2 cm, aria sa crește cu 44 cm^2 . Se cer laturile dreptunghiului.

61. Dacă marim baza unui dreptunghi cu 2 m și înălțimea cu 1 m, aria sa crește cu 25 m^2 ; dacă marim baza cu 1 m și înălțimea cu 2 m, aria crește cu 27 m^2 . Se cer dimensiunile dreptunghiului.

62. Un biciclist parcurge un drum de 81 km în două etape. În prima etapă, el merge cu o viteză de 18 km pe ora, iar în etapa a doua, de 15 km pe ora. Prima etapă durează cu o ora mai puțin decât a doua. De câți kilometri este fiecare etapă?

63. O mașină a parcurs 255 km în $5\frac{3}{4}$ ore. O parte din drum l-a parcurs cu o viteză de 40 km pe ora, iar

57. 850 lei; 900 lei. 58. $AB = 3$ cm; $AC = 8$ cm.
59. 8 cm; 9 cm. 60. 7 cm; 8 cm. 61. 9 m; 7 m. 62. 36 km;
45 km.

restul cu o viteză de 50 km pe oră. Cît timp a mers mașina cu 40 km pe oră și cît timp cu 50 km pe oră?

64. Distanța dintre două orașe, A și B , este de 48 km. Un biciclist pleacă de la A spre B și în același moment pleacă un om pe jos de la B spre A . Viteza biciclistului este de 3 ori mai mare decît a pietonului. Ei se întîlnesc după 3 ore. Să se calculeze vitezele lor.

65. Doi alergători aleargă pe o pistă circulară de 300 m, pornind din același punct. Dacă aleargă în același sens, unul din ei îl ajunge pe celălalt după 1 minut. Dacă aleargă în sens contrar ei se întîlnesc după 20 s. Să se afle vitezele celor doi alergători.

66. $a)$ O fracție este egală cu $\frac{3}{4}$. Dacă mărim numărătorul ei cu 2 și micșorăm numitorul tot cu 2, obținem o fracție echivalentă. Să se afle fracția. $b)$ Aceeași problemă, știind că, dacă micșorăm numărătorul cu 1 și mărim numitorul tot cu 1, obținem o fracție egală cu $\frac{2}{3}$.

67. Să se afle o fracție care să aibă însușirile următoare: dacă-i mărim ambii termeni cu 3, obținem o fracție egală cu $\frac{2}{3}$; dacă-i micșorăm ambii termeni cu 3, obținem o fracție egală cu $\frac{1}{2}$.

68. Într-o familie, raportul dintre salariul soției și al soțului era $\frac{2}{3}$. Ulterior, salariul soției

63. $3\frac{1}{4}$ ore; $2\frac{1}{2}$ ore. 64. 4 km/oră; 12 km/oră.

65. 5 m/s; 10 m/s. 66. $a)$ $\frac{12}{16}$; $b)$ $\frac{15}{20}$. 67. $\frac{9}{15}$.

s-a marit cu 150 lei, iar al sofului, cu 100 lei. Raportul dintre salariile astfel mărite este $\frac{3}{4}$. Ce salariu a avut fiecare dintre ei înainte de mărirea salariilor?

69. *a)* Avem o soluție cu o concentrație de 60%. Dacă adaugăm 50 g de acid, concentrația devine de 70%. Cît acid conține soluția și care este greutatea ei?

b) Aceleași întrebări, dacă se știe că, prin adăugarea a 70 g de apă, concentrația scade la 25%.

70. 1 kg de cafea cruda costa 92 lei, iar 1 kg de naut costa 5 lei. Cîta cafea și cît naut trebuie să luăm, pentru a face un amestec de 20 kg, care să valoreze 48,50 lei kilogramul?

71. Avem alcool de 60° și de 90°. Cît trebuie să luăm din fiecare fel, ca să obținem 10 litri de alcool de 65°?

72. Avem două feluri de alcool. Dacă amestecăm 1 l de alcool din primul fel cu 2 l de alcool din felul al doilea, obținem un amestec de 60°. Dacă luăm, invers, 2 l din primul fel și 1 l din al doilea, obținem un amestec de 70°. Cîte grade are fiecare fel de alcool?

73. Avem două feluri de mineruri de fier, *A* și *B*. 10 t din minereul *A* și 5 t din minereul *B* dau 8,5 t de fier. Invers, 5 t din minereul *A* și 10 t din minereul *B* dau 9,5 t de fier. Cît la sută fier conține fiecare fel de minereu?

74. Densitatea aurului este de 19,3, iar a aramei de 8,7. Un aliaj de aur și aramă cîntărește

68. 600 lei; 900 lei. 69. *a)* 90 g; 150 g; *b)* 30g; 50 g.
70. 10 kg cafea; 10 kg naut. 71. 8 l, 2 l. 72. 50°; 80°.
73. 50%; 70%.

150 g. Sub apa, aliajul cîntărește 138 g. Cît aur și cîtă arama conține aliajul?

75. O pîrghie de genul întîi are o lungime de 65 cm. Ce lungime trebuie să aibă fiecare dintre brațele ei, ca ea să fie în echilibru atunci cînd la capetele ei acționează o forță de 4 kg și una de 9 kg?

76. Brațele unei pîrghii de genul întîi sînt de 30 cm și 50 cm. La capetele ei sînt două talere. În fiecare din ele s-a pus o cantitate de alicie, în total 8 kg. Pentru ca pîrghia să fie în echilibru, trebuie mutat 1 kg de alicie dintr-un teler în celălalt. Cîte kilograme de alicie s-au pus în fiecare teler?

77. O pîrghie de genul întîi, AB , este în echilibru cînd asupra capătului A acționează o forță de 7 kg și asupra capătului B , de 5 kg. Dacă mărim prima forță cu 1 kg și micșorăm brațul OA cu 10 cm, pîrghia rămîne în echilibru. Să se afle lungimile celor două brațe.

78. Dacă mărim o catetă a unui triunghi dreptunghic cu 1 m și micșorăm cealaltă catetă cu 1 m, ipotenuza nu și schimbă lungimea. Suma catetelor este de 7 m. Să se afle catetele triunghiului.

79. Într-un semicerc cu diametrul AB se duc două coarde MA , MB , al căror raport este $\frac{5}{12}$. Dacă mutăm punctul M pe cerc astfel ca MA să crească cu 7 cm, MB scade cu 7 cm. Se cer segmentele MA , MB , AB .

74. $9\frac{15}{49}$ cm²; $2\frac{34}{49}$ cm². 75. 45 cm; 20 cm. 76. 2 kg; 6 kg.
77. 130 cm; 182 cm. 78. 3 m; 4 m. 79. 5 cm; 12 cm; 13 cm.

80. *a)* În două pahare se găsesc 300 g de apă. Luăm câte un sfert din conținutul fiecărui pahar și-l turnăm într-un al treilea pahar. În paharul al treilea se string astfel 75 g de apă. Câtă apă a fost la început în fiecare pahar?

b) Aceeași întrebare, dacă în paharul al treilea se găsesc 80 g de apă.

CUPRINSUL

Capitolul I

	Pag.
Expresii algebrice	3
Exerciții	8

Capitolul II

Numere pozitive și negative	14
Exerciții	45

Capitolul III

Monoame și polinoame	61
Exerciții	84

Capitolul IV

Fracții algebrice	102
Exerciții	107

Capitolul V

Ecuații	120
Exerciții	134
Probleme	138

Capitolul VI

Sisteme de ecuații	155
Exerciții	169
Probleme	175

